

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7 класса
общеобразовательных
учебных заведений

*Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины*

Харьков
«Гимназия»
2016

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я721

М52

Рекомендовано

*Министерством образования и науки Украины
(приказ МОН Украины от 20.07.2015 № 777)*

Мерзляк А. Г.

М52 Геометрия : учеб. для 7 кл. общеобразоват. учеб. за-
ведений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. —
Х. : Гимназия, 2016. — 224 с. : ил.

ISBN 978-966-474-270-9.

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я721

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский,
М. С. Якир, 2015

© ООО ТО «Гимназия», оригинал-макет,
художественное оформление, 2015

ISBN 978-966-474-270-9

ОТ АВТОРОВ

УЧЕНИКАМ

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый школьный предмет — **геометрию**. Обратите внимание, что в словах **«география»** и **«геометрия»** одинаковая часть — **«гео»**, что в переводе с греческого означает **«земля»**. Но если на уроках географии в 6 классе вы действительно занимались землеописанием (**«графия»** по-гречески — **«описание»**), то на уроках геометрии вам не придется заниматься землемерием (**«метрео»** по-гречески — **«мерить»**).

Геометрия — одна из самых древних наук. Ее название можно объяснить тем, что зарождение и развитие геометрии были тесно связаны с разнообразной практической деятельностью человека: разметкой границ земельных участков, строительством зданий, дорог, оросительных каналов и других сооружений, то есть геометрия, как говорят в таких случаях, была *прикладной наукой*. Постепенно, шаг за шагом человечество накапливало знания, и геометрия превратилась в красивую и совершенную, строгую и последовательную математическую теорию. Знакомиться с этой наукой и учиться применять полученные знания на практике вы и будете на уроках геометрии.

Знать геометрию чрезвычайно важно. Действительно, посмотрите вокруг — везде геометрия, точнее, **геометрические фигуры**: отрезки, треугольники, прямоугольники, прямоугольные параллелепипеды, шары и т. п.



а



б



Рис. 2. Сырецкая
телевизионная башня
(г. Киев)

Рис. 1. Архитектурные сооружения:
а — гостиница «Салют» (г. Киев);
б — административное здание (г. Лондон)

Без глубоких геометрических знаний не могли появиться сложные строительные конструкции (рис. 1, 2), корабли и самолеты (рис. 3) и даже детали детского конструктора и узоры вышивок (рис. 4). Для создания узоров мастерица должна иметь представление о таких геометрических понятиях, как симметрия и параллельный перенос. Не зная геометрии, невозможно стать хорошим инженером-конструктором, токарем, столяром, ученым, архитектором, дизайнером, модельером, специалистом в области компьютерной графики и т. д. Вообще, геометрические знания — важнейшая составляющая человеческой культуры.



а



б

Рис. 3. Машиностроительные конструкции:
а — корабль на стапелях Николаевского судостроительного завода;
б — самолет Ан-225 («Мрия»)



а



б

Рис. 4. Геометрия в быту:
а — детский конструктор; б — узор вышивки

Геометрия — очень интересный предмет. Мы надеемся, что вы в этом скоро убедитесь, и поможет этому учебник, который вы держите в руках. Познакомьтесь с его структурой.

Учебник разделен на четыре параграфа, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Изучая его, особое внимание обращайтесь на текст, напечатанный **жирным шрифтом**, *жирным курсивом* и *курсивом*; так в книге выделены определения, правила и важнейшие математические утверждения.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно отмеченные «звёздочкой» (*)).

Каждый пункт завершается рубрикой «Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные геометрические знания, а смекалка, изобретательность и сообразительность. Эти задачи полезны, как витамины: они развивают «геометрическое зрение» и интуицию.

Кроме того, в учебнике вы сможете прочитать интересные рассказы по истории геометрии.

Держайте! Желаем успеха!

УЧИТЕЛЯМ

Уважаемые коллеги!

Очевидно, что в рамках общеобразовательной школы невозможно реализовать формально-логический принцип построения курса геометрии: положить в основу систему аксиом, а далее строить изложение дедуктивно, то есть доказывать теоремы логически строго, основываясь на аксиомах и ранее доказанных фактах. Это можно объяснить тем, что количество учеников (особенно семиклассников), склонных к дедуктивному мышлению, невелико. На самом деле большинству присущ наглядно-образный тип мышления. Поэтому для ребенка апелляция к наглядной очевидности совершенно естественна и оправдана.

Исходя из сказанного, в основу данного учебника положен **наглядно-дедуктивный принцип в сочетании с частичной аксиоматизацией.**

Мы считаем, что цель изучения геометрии в школе — это не только развитие логического мышления и умения проводить доказательство. Авторы учебника ставят более широкую цель: уточнить представление учащихся об элементарных геометрических объектах (точка, прямая, луч, отрезок, угол), ознакомить их с важнейшими свойствами базовых фигур элементарной геометрии (треугольник, окружность, четырехугольник и т. п.), развить у них потребность в доказательстве, то есть заложить основы дедуктивного и эвристического мышления, а главное — **научить учащихся применять свойства геометрических фигур при решении практических и теоретических задач.** Мы надеемся, что этот учебник поможет в реализации указанных целей.

В книге собран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет никакой необходимости. Вместе с тем гораздо удобнее работать, когда есть большой запас задач. Это позволит реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

Зеленым цветом отмечены номера задач, рекомендуемых для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, которые по усмотрению учителя (с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса) можно решать устно.

Давайте превратим школьный курс геометрии в понятный и привлекательный предмет.

Желаем творческого вдохновения и терпения.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

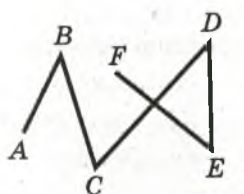
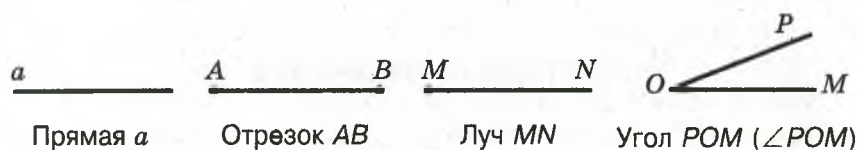
- n° задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;
- $n^{\bullet}$ задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;
- n^{**} задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;
- n^* задачи для математических кружков и факультативов;
-  ключевые задачи, результат которых может быть использован для решения других задач;
-  доказательство теоремы, соответствующее достаточному уровню учебных достижений;
-  доказательство теоремы, соответствующее высокому уровню учебных достижений;
-  доказательство теоремы, не обязательное для изучения;
-  окончание доказательства теоремы;
-  окончание решения задачи;
-  рубрика «Когда сделаны уроки».

Равные отрезки на чертежах обозначены одинаковым количеством черточек, равные углы — одинаковым количеством дуг, за исключением отрезков и углов, которые требуется найти.

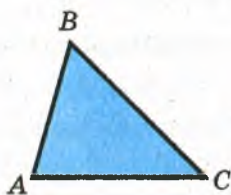
ВСТУПЛЕНИЕ

Что изучает геометрия?

Хотя геометрия — новый для вас учебный предмет, однако на уроках математики вы уже знакомились с азами этой мудрой науки. Так, все геометрические фигуры, изображенные на рисунке 5, вам хорошо известны.



Ломаная $ABCDEF$



Треугольник ABC



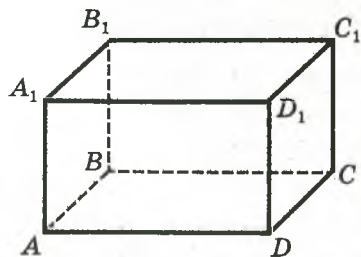
Прямоугольник $ABCD$



Окружность



Круг



Прямоугольный параллелепипед
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$



Многоугольники

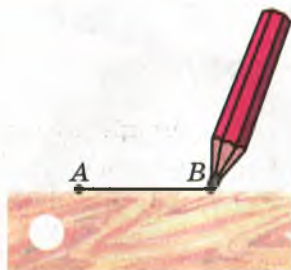


Рис. 6



Рис. 7

Вы умеете с помощью линейки соединять две точки отрезком (рис. 6), с помощью циркуля строить окружность (рис. 7), с помощью линейки и угольника строить перпендикулярные и параллельные прямые (рис. 8), измерять длину отрезка и строить отрезок заданной длины с помощью линейки с миллиметровыми делениями (рис. 9), находить величину угла и строить угол заданной величины с помощью транспортира (рис. 10), классифицировать треугольники (см. форзац).

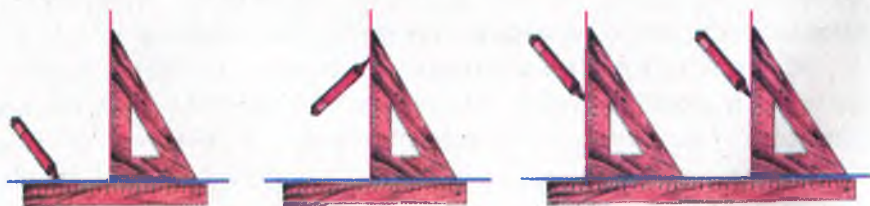


Рис. 8

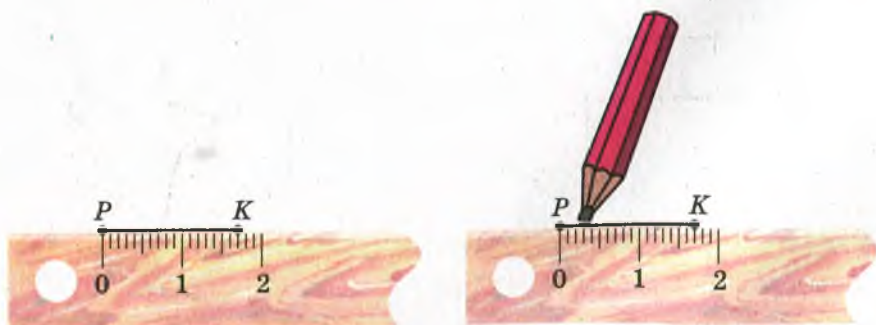


Рис. 9

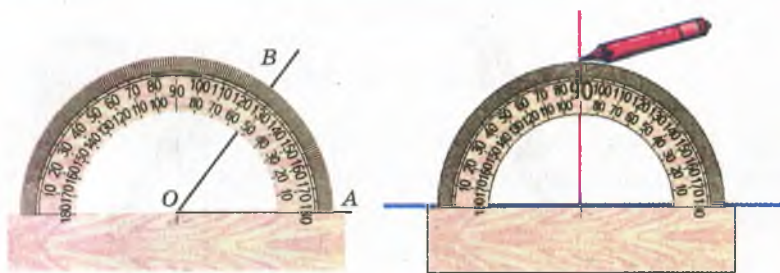


Рис. 10

Однако знать, как «выглядит» фигура, или уметь выполнять простейшие построения — это всего лишь самые начальные знания *науки о свойствах геометрических фигур*, то есть *геометрии*.

При изучении *систематического курса* геометрии вы будете постепенно, в определенной последовательности изучать свойства геометрических фигур, а значит, и сами фигуры, как уже знакомые вам, так и новые. Это означает, что вы должны научиться, используя одни свойства фигуры, находить, а главное, *доказывать* другие ее свойства.

Школьный курс геометрии традиционно делят на *планиметрию* и *стереометрию*. Планиметрия изучает фигуры на плоскости («планум» в переводе с латинского — «плоскость»), стереометрия — фигуры в пространстве («стереос» в переводе с греческого — «пространственный»).

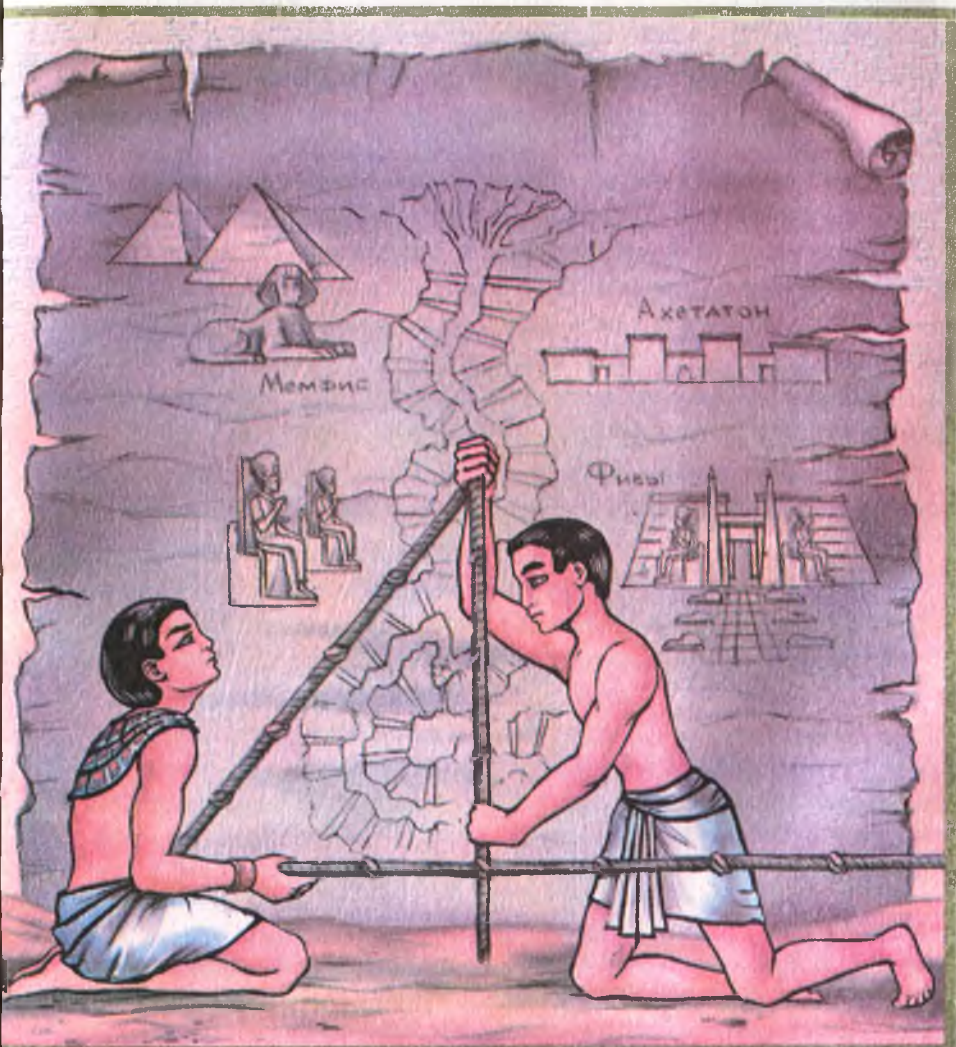
Итак, мы приступаем к изучению планиметрии.

ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

§1

В этом параграфе рассматриваются знакомые вам из курса математики предыдущих классов геометрические фигуры, а именно: точки, прямые, отрезки, лучи и углы.

Вы узнаете больше о свойствах этих фигур. Некоторые из этих свойств научитесь **доказывать**. Слова **определение**, **теорема**, **аксиома** станут для вас привычными, понятными и часто употребляемыми.





1. Точки и прямые

Точка — самая простая геометрическая фигура. Это единственная фигура, которую нельзя разбить на части. Например, каждая из фигур, изображенных на рисунке 11, разбита на части. И даже о фигуре, изображенной на рисунке 12, которая состоит из двух точек, можно сказать, что она состоит из двух частей: точки A и точки B .



Рис. 11



Рис. 12

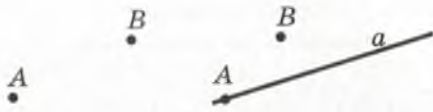


Рис. 13

На рисунке 13 изображены прямая a и две точки A и B . Говорят, что *точка A принадлежит прямой a* , или *точка A лежит на прямой a* , или *прямая a проходит через точку A* , и, соответственно, *точка B не принадлежит прямой a* , или *точка B не лежит на прямой a* , или *прямая a не проходит через точку B* .

Прямая — это геометрическая фигура, обладающая определенными свойствами.

Основное свойство прямой. Через любые две точки¹ можно провести прямую, и притом только одну.

Почему это свойство прямой считают основным?

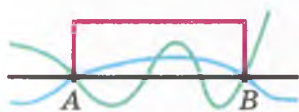
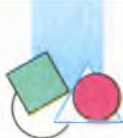


Рис. 14

Пусть о некоторой линии известно лишь то, что она проходит через точки A и B . Для того чтобы составить представление об этой фигуре, такой информации явно недостаточно. Ведь через точки A и B можно провести много различных *линий* (рис. 14). Прямая же задается этими точками однозначно. В этом и состоит суть основного свойства прямой.

¹ Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. п., будем подразумевать, что это разные точки и разные прямые. Случай их совпадения будем оговаривать особо.



Это свойство позволяет обозначать прямую, называя две любые ее точки. Так, прямую, проведенную через точки M и N , называют «прямая MN » (или «прямая NM »).

Основное свойство геометрической фигуры еще называют аксиомой (более подробно об аксиомах вы узнаете в п. 6).

Если надо разъяснить смысл какого-либо понятия (термина), то используют **определения**. Например:

- 1) часами называют прибор для измерения времени;
- 2) геометрия — это раздел математики, изучающий свойства фигур.

Определения есть и в геометрии.

Определение. Две прямые, имеющие общую точку, называют **пересекающимися**.

На рисунке 15 изображены прямые a и b , пересекающиеся в точке O .

Часто справедливость (истинность) какого-либо факта устанавливают с помощью *логических рассуждений*.

Рассмотрим следующую задачу. Известно, что все жители Геометрической улицы — математики. Женя живет по адресу ул. Геометрическая, 5. Является ли Женя математиком?

По условию задачи Женя живет на Геометрической улице. А поскольку все жители этой улицы математики, то Женя — математик.

Приведенные логические рассуждения называют **доказательством** того факта, что Женя — математик.

В математике утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства, называют **теоремой**.

Теорема 1.1. Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

Доказательство. ☉ Предположим, что пересекающиеся прямые a и b , кроме общей точки A , имеют еще одну общую точку B (рис. 16). Тогда через две точки A и B

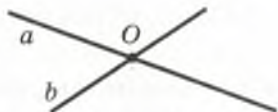
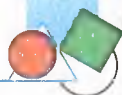


Рис. 15



Рис. 16



проходят две прямые. А это противоречит основному свойству прямой. Следовательно, предположение о существовании второй точки пересечения прямых a и b неверно. ▲

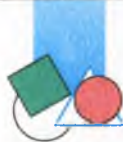


1. Какую фигуру нельзя разбить на части?
2. Сформулируйте основное свойство прямой.
3. Какое свойство прямой позволяет обозначать ее, называя любые две точки прямой?
4. Для чего используют определения?
5. Какие две прямые называют пересекающимися?
6. Как называют утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства?
7. Сформулируйте теорему о двух пересекающихся прямых.



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

- 1.° Проведите прямую, обозначьте ее буквой m . Отметьте точки A и B , лежащие на этой прямой, и точки C , D , E , не лежащие на ней.
- 2.° Отметьте точки M и K и проведите через них прямую. Отметьте на этой прямой точку E . Запишите все возможные обозначения полученной прямой.
- 3.° Проведите прямые a и b так, чтобы они пересекались. Обозначьте точку их пересечения буквой C . Принадлежит ли точка C прямой a ? прямой b ?
- 4.° Отметьте три точки так, чтобы они не лежали на одной прямой, и через каждую пару точек проведите прямую. Сколько образовалось прямых?
- 5.° Отметьте четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.
- 6.° Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Отметьте точки пересечения этих прямых. Сколько можно получить точек пересечения?



- 7.° Отметьте четыре точки так, чтобы при проведении прямой через каждые две из них на рисунке: 1) образовалась одна прямая; 2) образовались четыре прямые; 3) образовалось шесть прямых. Проведите эти прямые.



УПРАЖНЕНИЯ

- 8.° Пользуясь рисунком 17:

- 1) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой a ; прямой MK ;
- 2) укажите все отмеченные точки, не принадлежащие прямой a ; прямой MK ;
- 3) определите, пересекаются ли прямые a и MK ;
- 4) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой a , но не принадлежащие прямой MK .

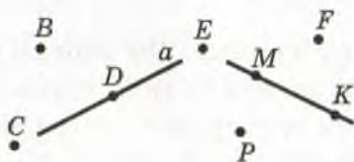


Рис. 17

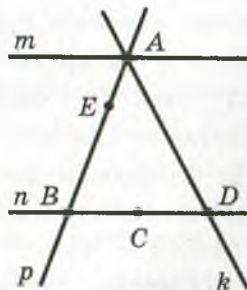


Рис. 18

- 9.° Пользуясь рисунком 18, укажите:

- 1) какие из отмеченных точек принадлежат прямой p , а какие не принадлежат ей;
- 2) каким прямым принадлежит точка A ; точка B ; точка C ; точка D ; точка E ;
- 3) какие прямые проходят через точку C ; точку B ; точку A ;
- 4) в какой точке пересекаются прямые k и p ; прямые m и k ;
- 5) в какой точке пересекаются три из четырех изображенных на рисунке прямых.



- 10.* Точка C принадлежит прямой AB . Являются ли различными прямые AB и AC ? Ответ обоснуйте.
- 11.* Провели четыре прямые, каждые две из которых пересекаются, причем через каждую точку пересечения проходят только две прямые. Сколько точек пересечения при этом образовалось?
- 12.* Как надо расположить шесть точек, чтобы они определяли шесть прямых?
- 13.* Данную прямую пересекают четыре прямые. Сколько может образоваться точек пересечения этих прямых с данной?
- 14.* Провели четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения может образоваться?
- 15.* Провели пять прямых, каждые две из которых пересекаются. Каково наименьшее возможное количество точек пересечения этих прямых? Какое наибольшее количество точек пересечения может образоваться?
- 16.* Можно ли провести шесть прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно четыре точки?
- 17.* На плоскости проведены три прямые. На первой прямой отметили пять точек, на второй — семь точек, а на третьей — три точки. Каким может быть наименьшее количество отмеченных точек?
- 18.* Можно ли отметить несколько точек и провести несколько прямых так, чтобы на каждой прямой лежали ровно три отмеченные точки и через каждую точку проходили ровно три из проведенных прямых?



**НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ**

19. Составьте квадрат из нескольких фигур, каждая из которых равна фигуре, изображенной на рисунке 19.



Рис. 19

2. Отрезок и его длина

На рисунке 20 изображена прямая a , проходящая через точки A и B . Эти точки ограничивают часть прямой a , выделенную красным цветом. Такую часть прямой вместе с точками A и B называют **отрезком**, а точки A и B — **концами** этого отрезка.



Рис. 20



Рис. 21

Для любых двух точек существует *единственный* отрезок, для которого эти точки являются концами, то есть *отрезок своими концами задается однозначно*. Поэтому отрезок обозначают, называя его концы. Например, отрезок, изображенный на рисунке 21, обозначают так: MN или NM (читают: «отрезок MN » или «отрезок NM »).

На рисунке 22 изображены отрезок AB и точка X , принадлежащая этому отрезку, но не совпадающая ни с одним из его концов. Точку X называют **внутренней** точкой отрезка AB . В этом случае также говорят, что точка X **лежит между** точками A и B .



Рис. 22

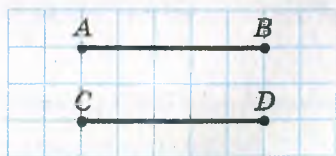


Рис. 23

Таким образом, отрезок AB состоит из точек A и B , а также всех точек прямой AB , лежащих между точками A и B .

Определение. Два отрезка называют **равными**, если их можно совместить наложением.

На рисунке 23 изображены равные отрезки AB и CD . Пишут: $AB = CD$.

Вы знаете, что каждый отрезок имеет определенную длину и для ее измерения надо выбрать **единичный** отрезок. В качестве единичного можно выбрать любой отрезок.

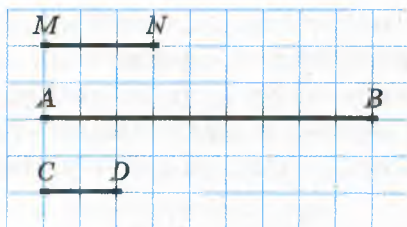


Рис. 24

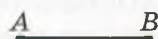


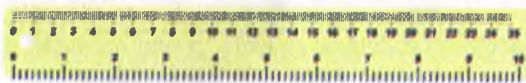
Рис. 25

Например, будем считать отрезок MN на рисунке 24 единичным. Этот факт записывают так: $MN = 1$ ед. Тогда считают, что длина отрезка AB равна трем **единицам длины**, и записывают: $AB = 3$ ед. Также принята запись $AB = 3$, ее читают: «отрезок AB равен трем». Для отрезка CD имеем: $CD = \frac{2}{3}$.

На практике чаще всего используют такие единичные отрезки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

В зависимости от выбора единицы длины меняется **числовое значение длины** отрезка. Например, на рисунке 25 имеем: $AB = 17$ мм, или $AB = 1,7$ см, или $AB = 0,17$ дм и т. д.

На производстве и в быту используют различные приборы для измерения длины отрезка (рис. 26): линейку с делениями, рулетку, штангенциркуль, микрометр, полевой циркуль.



Линейка с делениями



Рулетка



Штангенциркуль



Микрометр



Полевой циркуль

Рис. 26



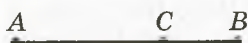
Равные отрезки имеют равные длины, и наоборот, если длины отрезков равны, то равны и сами отрезки.

Если длина отрезка AB больше длины отрезка MN , как, например, на рисунке 24, то говорят, что отрезок AB больше отрезка MN , и записывают: $AB > MN$. Также можно сказать, что отрезок MN меньше отрезка AB , и записать: $MN < AB$.

В дальнейшем, говоря «сумма отрезков», будем подразумевать сумму длин этих отрезков.

Основное свойство длины отрезка. Если точка C является внутренней точкой отрезка AB , то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB (рис. 27), то есть

$$AB = AC + CB.$$



$$AB = AC + CB$$

Рис. 27



Рис. 28

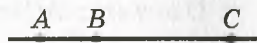


Рис. 29

Определение. Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB . Если точки A и B совпадают, то расстояние между ними считают равным нулю.

Определение. Серединой отрезка AB называют такую его точку C , что $AC = CB$.

На рисунке 28 точка C — середина отрезка AB .

Задача. Точки A , B и C принадлежат одной прямой, $AB = 8$ см, отрезок AC на 2 см длиннее отрезка BC . Найдите отрезки¹ AC и BC .

Решение. В условии не указано, каково взаимное расположение данных точек на прямой. Поэтому рассмотрим три возможных случая.

1) Точка B — внутренняя точка отрезка AC (рис. 29). Тогда отрезок AC длиннее отрезка BC на длину отрезка AB , то есть на 8 см. Это противоречит условию. Следовательно, такой случай невозможен.

¹ Часто вместо «Найдите длину отрезка...» говорят: «Найдите отрезок...».



2) Точка C — внутренняя точка отрезка AB (рис. 30). В этом случае $AC + BC = AB$. Пусть $BC = x$ см, тогда $AC = (x + 2)$ см. Имеем:

$$x + 2 + x = 8;$$

$$x = 3.$$

Следовательно, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.



Рис. 30

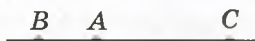


Рис. 31

3) Точка A — внутренняя точка отрезка BC (рис. 31). В этом случае $AB + AC = BC$ и тогда $AC < BC$. Это противоречит условию. Следовательно, такой случай невозможен.

Ответ: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см. ●



1. Сколько существует отрезков, концами которых являются две данные точки?
2. Из каких точек состоит отрезок AB ?
3. Какие два отрезка называют равными?
4. Можно ли любой отрезок выбрать в качестве единичного?
5. Что можно сказать о длинах равных отрезков?
6. Что можно сказать об отрезках, имеющих равные длины?
7. Сформулируйте основное свойство длины отрезка.
8. Что называют расстоянием между двумя точками?
9. Чему равно расстояние между двумя совпадающими точками?
10. Какую точку называют серединой отрезка AB ?

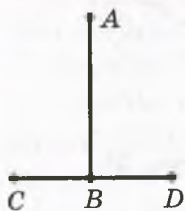


ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

- 20.° Отметьте две точки A и B и проведите через них прямую. Отметьте точки C , D и E , принадлежащие отрезку AB , и точки F , M и K , которые не принадлежат отрезку AB , но принадлежат прямой AB .



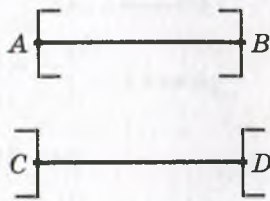
- 21.° Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько образовалось отрезков?
- 22.° Отметьте на прямой точки A , B , C и D так, чтобы точка C лежала между точками A и B , а точка D — между точками B и C .
- 23.° Отметьте на прямой точки A , B и C так, чтобы выполнялось равенство $AC = AB + BC$.



а



б



в

Рис. 32

- 24.° Сравните на глаз отрезки AB и CD (рис. 32). Проверьте свой вывод измерением.

- 25.° Сравните на глаз отрезки AB и BC (рис. 33). Проверьте свой вывод измерением.

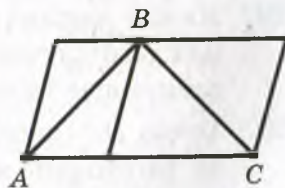
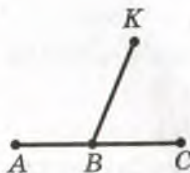


Рис. 33

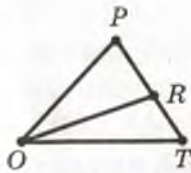


УПРАЖНЕНИЯ

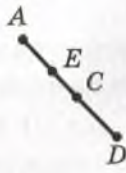
- 26.° Назовите все отрезки, изображенные на рисунке 34.



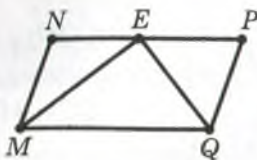
а



б



в



г

Рис. 34



- 27.°** Найдите длину каждого из отрезков, изображенных на рисунке 35, если единичный отрезок равен отрезку: 1) AB ; 2) MN .

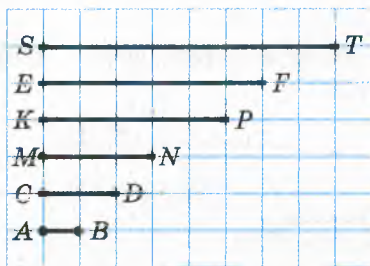


Рис. 35

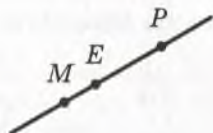


Рис. 36

- 28.°** Какая из точек, отмеченных на рисунке 36, лежит между двумя другими? Запишите соответствующее равенство, следующее из основного свойства длины отрезка.
- 29.°** Между какими точками лежит точка B (рис. 37)? Для каждого случая запишите соответствующее равенство, следующее из основного свойства длины отрезка.
- 30.°** Точка D — внутренняя точка отрезка ME . Найдите:
- 1) расстояние между точками M и E , если $MD = 1,8$ дм, $DE = 2,6$ дм;
 - 2) длину отрезка MD , если $ME = 42$ мм, $DE = 1,5$ см.

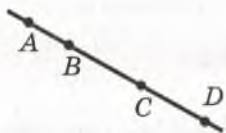


Рис. 37



Рис. 38

- 31.°** Точки A , B и C лежат на одной прямой (рис. 38). Какие из следующих утверждений верны:
- 1) $AB + BC = AC$;
 - 2) $AC + AB = BC$?
- 32.°** Точка K является серединой отрезка MN . Можно ли совместить наложением: 1) отрезки MK и KN ; 2) отрезки MK и MN ?



- 33.°** Точка K — середина отрезка MN , точка E — середина отрезка KN , $EN = 5$ см. Найдите отрезки MK , ME и MN .
- 34.°** Точка C — внутренняя точка отрезка AB , длина которого равна 20 см. Найдите отрезки AC и BC , если:
- 1) отрезок AC на 5 см больше отрезка BC ;
 - 2) отрезок AC в 4 раза меньше отрезка BC ;
 - 3) $AC : BC = 9 : 11$.
- 35.°** Точка K принадлежит отрезку CD , длина которого равна 28 см. Найдите отрезки CK и KD , если:
- 1) отрезок CK на 4 см меньше отрезка KD ;
 - 2) отрезок CK в 6 раз больше отрезка KD ;
 - 3) $CK : KD = 3 : 4$.
- 36.°** Отрезки AB и CD равны (рис. 39). Докажите, что отрезки AC и BD также равны.



Рис. 39

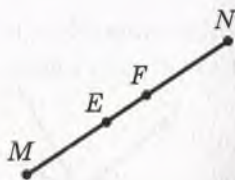


Рис. 40

- 37.°** Отрезки ME и FN равны (рис. 40). Докажите, что $MF = EN$.
- 38.°** Точка C делит отрезок AB , длина которого равна a , на два отрезка. Найдите расстояние между серединами отрезков AC и BC .
- 39.°** Точки A , B и C лежат на одной прямой. Найдите отрезок BC , если $AB = 24$ см, $AC = 32$ см. Сколько решений имеет задача?
- 40.°** На прямой отмечены точки A , B и C так, что $AB = 15$ см, $AC = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и AC .
- 41.°** Отрезок EF равен 12 см. Найдите на прямой EF все точки, сумма расстояний от каждой из которых до концов отрезка EF равна: 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 10 см.



- 42.* Через точки A и B проведена прямая. Где на этой прямой лежит точка C , расстояние от которой до точки B в 2 раза больше расстояния от нее до точки A ?
- 43.* Отрезок, длина которого равна 32 см, разделили на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 18 см. Найдите длину среднего отрезка.
- 44.* Какое наименьшее количество внутренних точек надо отметить на отрезках, изображенных на рисунке 41, чтобы на каждом из них было отмечено по две внутренние точки?

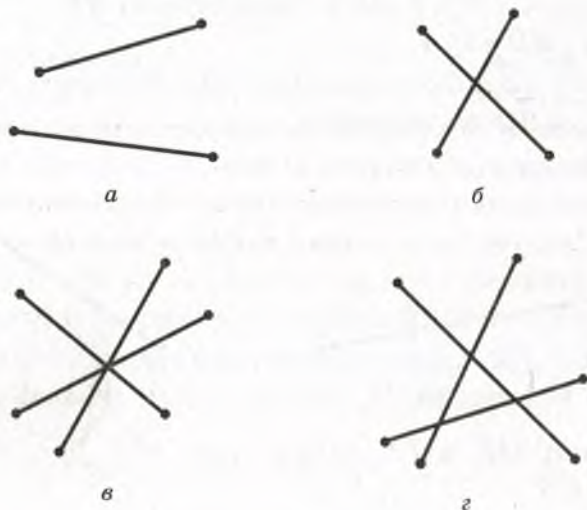


Рис. 41

- 45.* Сколько точек надо отметить между точками A и B , чтобы вместе с отрезком AB образовалось шесть отрезков?
- 46.* На шкале линейки нанесены только деления 0 см, 5 см и 13 см (рис. 42). Как, пользуясь этой линейкой, можно построить отрезок длиной: 1) 3 см; 2) 2 см; 3) 1 см?
- 47.* На шкале линейки нанесены только деления 0 см, 7 см и 11 см. Как, пользуясь этой линейкой, можно построить отрезок длиной: 1) 8 см; 2) 5 см?

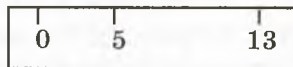


Рис. 42



**НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ**

48. Из прямоугольников размерами 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×13 составьте прямоугольник, каждая сторона которого больше 1.

3. Луч. Угол. Измерение углов

Проведем прямую AB и отметим на ней произвольную точку O . Эта точка разбивает прямую на две части, выделенные на рисунке 43 разными цветами. Каждую из этих частей вместе с точкой O называют **лучом** или **полупрямой**. Точку O называют **началом** луча.

Каждый из лучей, изображенных на рисунке 43, состоит из точки O и всех точек прямой AB , лежащих по одну сторону от точки O .



Рис. 43

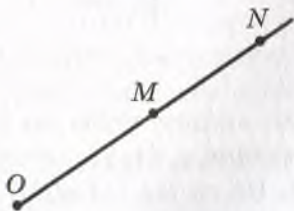


Рис. 44

Это позволяет обозначать луч, называя две его точки: первой обязательно указывают начало луча, второй — любую другую точку, принадлежащую лучу. Так, луч с началом в точке O (рис. 44) можно обозначить OM или ON .

Лучи OA и OB (рис. 43) дополняют друг друга до прямой. Также можно сказать, что объединением этих лучей является прямая.

Определение. Два луча, имеющих общее начало и лежащих на одной прямой, называют **дополнительными**.



Рис. 45

Например, лучи BC и BA — дополнительные (рис. 45). Их объединением является прямая AC . Заметим, что, объединив лучи CA и AC , мы тоже по-

лучим прямую AC . Однако эти лучи не являются дополнительными: у них нет общего начала.

На рисунке 46, *а* изображена фигура, состоящая из двух лучей OA и OB , имеющих общее начало. Эта фигура делит плоскость на две части, выделенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с лучами OA и OB называют **углом**.

Лучи OA и OB называют **сторонами угла**, а точку O — **вершиной угла**.

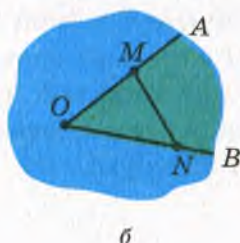
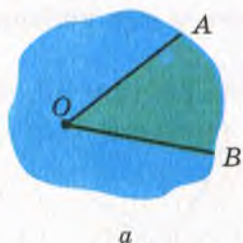


Рис. 46

Как видим, углы на рисунке 46, *а* внешне существенно различаются. Это различие определено следующим свойством. На лучах OA и OB выберем произвольно точки M и N (рис. 46, *б*). Отрезок MN принадлежит «**зеленому**» углу, а «**синему**» углу принадлежат лишь концы отрезка.

В дальнейшем, говоря «**угол**», будем подразумевать лишь тот из них, который содержит любой отрезок с концами на его сторонах. Ситуации, в которых придется рассматривать углы, не обладающие этим свойством, будут специально оговариваться.

Существует несколько способов обозначения углов. Угол на рисунке 47 можно обозначить так: $\angle MON$, или $\angle NOM$, или просто $\angle O$ (читают соответственно: «угол MON », «угол NOM », «угол O »).

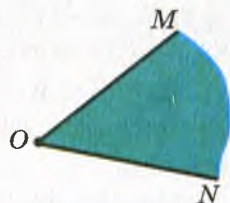


Рис. 47

На рисунке 48 изображено несколько углов, имеющих общую вершину. Здесь обозначение угла одной буквой может привести к путанице. В таких случаях углы удобно обозначать с помощью цифр: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (читают соответственно: «угол один», «угол два», «угол три»).

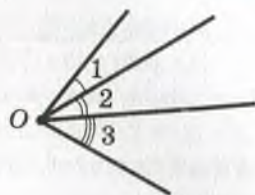


Рис. 48

Определение. Угол, стороны которого являются дополнительными лучами, называют **развернутым**

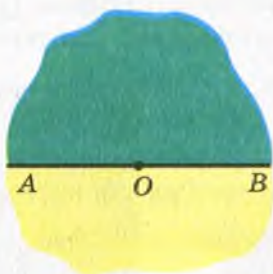


Рис. 49



Рис. 50

На рисунке 49 лучи OA и OB являются дополнительными, поэтому углы, выделенные зеленым и желтым цветами, являются развернутыми.

Любая прямая делит плоскость на две **полуплоскости**, для которых эта прямая является **границей** (рис. 50). Считают, что прямая принадлежит каждой из двух полуплоскостей, для которых она является границей. А поскольку стороны развернутого угла образуют прямую, то можно сказать, что развернутый угол — это полуплоскость, на границе которой отмечена точка — вершина угла.

Определение. Два угла называют **равными**, если их можно совместить наложением.

На рисунке 51 изображены равные углы ABC и MNK . Пишут: $\angle ABC = \angle MNK$.

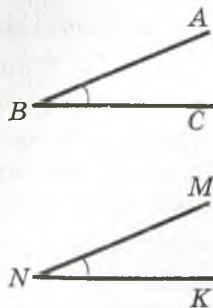


Рис. 51



Понятно, что все развернутые углы равны.

На рисунке 52 изображены угол AOB и луч OC , принадлежащий этому углу, но отличный от его сторон. Говорят, что луч OC *проходит между сторонами угла AOB* и делит его на два угла AOC и COB .

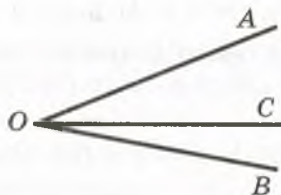


Рис. 52

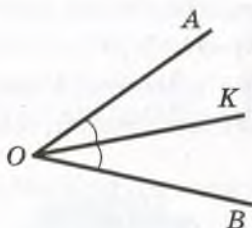


Рис. 53

Определение. Биссектрисой угла называют луч с началом в вершине угла, делящий этот угол на два равных угла.

На рисунке 53 луч OK — биссектриса угла AOB . Значит, $\angle AOK = \angle KOB$.

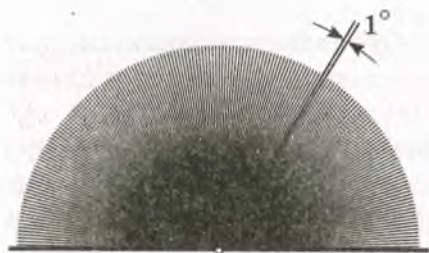


Рис. 54



Рис. 55

Вы знаете, что каждый угол имеет величину. Для ее измерения нужно выбрать единицу измерения — **единичный угол**. Выбрать его можно, например, так. Разделим развернутый угол на 180 равных углов (рис. 54). Угол, образованный двумя соседними лучами, принимают за единичный. Его величину называют **градусом** и записывают: 1° .

Например, градусная мера (величина) угла AOB (рис. 55) равна 20° (этот факт легко установить с помощью транспор-



тира). В таком случае говорят, что угол AOB равен 20° , и записывают: $\angle AOB = 20^\circ$.

Из принятого определения градуса следует, что *градусная мера развернутого угла равна 180°* .

На рисунке 56, а изображен старинный угломерный прибор астролябия (в переводе с греческого — «схватывающая звезды»). На протяжении многих веков именно такой прибор помогал мореплавателям находить путь, а астрономам — определять положение звезд. В наше время для измерения углов на практике используют астролябию (рис. 56, б), а также другие приборы специального назначения: теодолит (рис. 57) — для измерения на местности, буссоль (рис. 58) — в артиллерии, секстант (рис. 59) — в морском деле.



а



б



Рис. 58. Буссоль



Рис. 59. Секстант

Рис. 56. Астролябия: Рис. 57. Теодолит

а — старинная;
б — современная

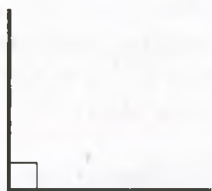
Для более точного измерения углов используют части градуса: $\frac{1}{60}$ градуса равна одной минуте ($1'$), то есть $1^\circ = 60'$; $\frac{1}{60}$ минуты называют секундой ($1''$), то есть $1' = 60''$. Например, запись $23^\circ 15' 11''$ означает, что градусная мера угла составляет 23 градуса 15 минут 11 секунд.



Существуют и другие единицы измерения углов, например, в морском деле используют единицу 1 румб ($11^{\circ}15'$).

Определение. Угол, градусная мера которого равна 90° , называют **прямым**. Угол, градусная мера которого меньше 90° , называют **острым**. Угол, градусная мера которого больше 90° , но меньше 180° , называют **тупым**.

На рисунке 60 изображены углы каждого из трех указанных видов.



Прямой угол



Острый угол



Тупой угол

Рис. 60

Равные углы имеют равные величины, и наоборот, если величины углов равны, то равны и сами углы.

Если величина угла ABC больше величины угла MNP , то говорят, что угол ABC больше угла MNP , и записывают: $\angle ABC > \angle MNP$. Также говорят, что угол MNP меньше угла ABC , и записывают: $\angle MNP < \angle ABC$.

В дальнейшем, говоря «сумма углов», будем подразумевать сумму величин этих углов.

Основное свойство величины угла. Если луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (рис. 61).

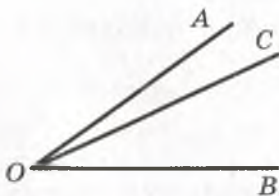


Рис. 61

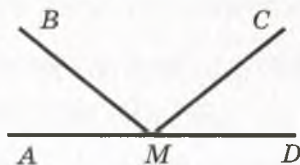
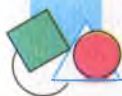


Рис. 62



Задача. На рисунке 62 $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118^\circ$.
Найдите угол¹ AMB .

Решение. Имеем: $\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,
 $\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC$.

Поскольку $\angle AMC = \angle DMB$, то $\angle AMB = \angle DMC$.

Запишем: $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180^\circ$.

Тогда $2\angle AMB + 118^\circ = 180^\circ$. Отсюда $\angle AMB = 31^\circ$.

Ответ: 31° . ●



1. Как называют фигуру, образованную точкой, принадлежащей прямой, и одной из частей, на которые эта точка делит прямую? Как при этом называют данную точку?
2. Как обозначают луч?
3. Какие два луча называют дополнительными?
4. Как называют фигуру, образованную двумя лучами с общим началом и одной из частей, на которые эти лучи делят плоскость? Как при этом называют данные лучи? их общее начало?
5. Как обозначают угол?
6. Какой угол называют развернутым?
7. Как называют части, на которые прямая делит плоскость?
8. Какие два угла называют равными?
9. Что называют биссектрисой угла?
10. В каких единицах измеряют углы?
11. Какова градусная мера развернутого угла?
12. Как называют угол, градусная мера которого равна 90° ?
13. Какой угол называют острым?
14. Какой угол называют тупым?
15. Что можно сказать о величинах равных углов?
16. Что можно сказать об углах, величины которых равны?
17. Сформулируйте основное свойство величины угла.

¹ Часто вместо «Найдите градусную меру угла...» говорят: «Найдите угол...».



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

- 49.° Проведите два луча AB и AC так, чтобы они не были дополнительными. Постройте для каждого из этих лучей дополнительный луч. Обозначьте и запишите все образовавшиеся лучи.
- 50.° Проведите отрезок AB и два луча AB и BA . Являются ли эти лучи дополнительными? Ответ обоснуйте.
- 51.° Начертите угол MNE и проведите лучи NA и NC между его сторонами. Запишите все образовавшиеся углы.
- 52.° Проведите лучи OA , OB , OC и OD так, чтобы луч OC проходил между сторонами угла AOB , а луч OD — между сторонами угла BOC .
- 53.° Начертите два луча так, чтобы их общая часть была:
1) точкой; 2) отрезком; 3) лучом.



УПРАЖНЕНИЯ

- 54.° Прямая EF пересекает прямые AB и CD (рис. 63). Укажите:
1) все образовавшиеся лучи с началом в точке M ;
2) все пары дополнительных лучей с началом в точке K .
- 55.° Запишите все лучи, изображенные на рисунке 64. Укажите, какие из них являются дополнительными лучами с началом в точке O .



Рис. 63



Рис. 64

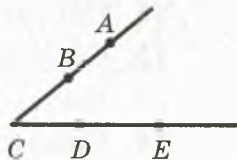


Рис. 65

- 56.° Можно ли угол, изображенный на рисунке 65, обозначить так:
- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $\angle ABC$; | 3) $\angle ADC$; | 5) $\angle ACE$; | 7) $\angle BDE$; |
| 2) $\angle ACD$; | 4) $\angle DCA$; | 6) $\angle BCD$; | 8) $\angle ECD$? |



57.° Запишите все углы, изображенные на рисунке 66.

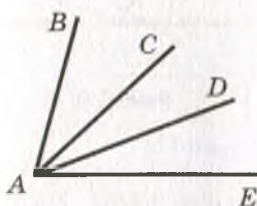


Рис. 66

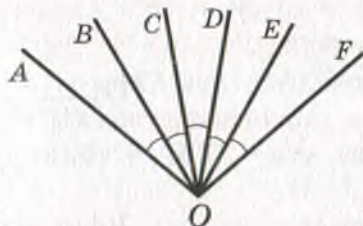


Рис. 67

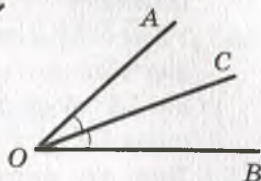


Рис. 68

58.° На рисунке 67 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$.

- 1) Какой луч является биссектрисой угла AOC ? угла DOF ? угла BOF ?
- 2) Биссектрисой каких углов является луч OC ?

59.° На рисунке 68 луч OC — биссектриса угла AOB . Можно ли совместить наложением: 1) углы AOC и BOC ; 2) углы AOC и AOB ?

60.° Луч BD делит угол ABC на два угла. Найдите:

- 1) угол ABC , если $\angle ABD = 54^\circ$, $\angle CBD = 72^\circ$;
- 2) угол CBD , если $\angle ABC = 158^\circ$, $\angle ABD = 93^\circ$.

61.° Луч OP проходит между сторонами угла $МОК$. Найдите угол MOP , если $\angle MOK = 172^\circ$, $\angle POK = 85^\circ$.

62.° Верно ли утверждение:

- 1) любой угол, который меньше тупого, — острый;
- 2) угол, который меньше развернутого, — тупой;
- 3) угол, который меньше тупого угла в 2 раза, — острый;
- 4) сумма двух острых углов больше прямого угла;
- 5) угол, который меньше развернутого угла в 2 раза, больше любого острого угла;
- 6) угол, который больше прямого, — тупой?

63.° Из вершины прямого угла $ВОМ$ (рис. 69) проведены два луча OA и OC так, что $\angle BOC = 74^\circ$, $\angle AOM = 62^\circ$. Найдите угол AOC .

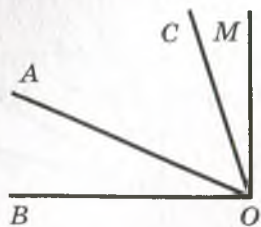


Рис. 69



- 64.° Из вершины развернутого угла ACP (рис. 70) провели два луча CT и CF так, что $\angle ACF = 158^\circ$, $\angle TCP = 134^\circ$. Найдите угол TCF .

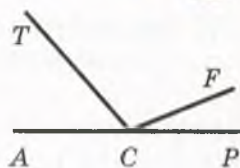


Рис. 70

- 65.° Угол CEF равен 152° , луч EM проходит между его сторонами, угол CEM на 18° больше угла FEM . Найдите углы CEM и FEM .
- 66.° Луч AK принадлежит углу BAD . Найдите углы BAK и DAK , если угол BAK в 7 раз меньше угла DAK и $\angle BAD = 72^\circ$.
- 67.° На рисунке 71 равные углы отмечены дугами. Найдите углы ABC , MKE и STK , если в качестве единичного угла взять: 1) угол ABC ; 2) угол MKE .

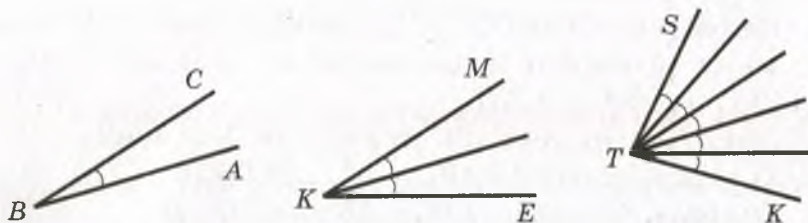


Рис. 71

- 68.° Точки A , B и C расположены на прямой так, что $AB = 3,2$ см, $AC = 4,8$ см, $BC = 8$ см. Являются ли лучи AB и AC дополнительными?
- 69.° На рисунке 72 угол ABC прямой, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, лучи BD и BK — биссектрисы углов ABE и FBC соответственно. Найдите угол DBK .

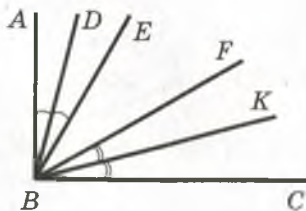


Рис. 72

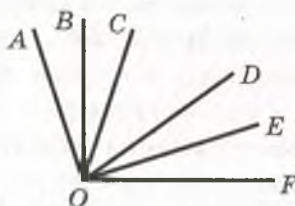


Рис. 73

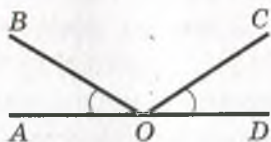


Рис. 74

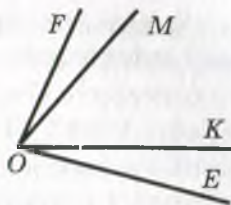


Рис. 75

- 70.* На рисунке 73 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, луч OB — биссектриса угла AOC , луч OE — биссектриса угла DOF , $\angle BOE = 72^\circ$. Найдите угол AOF .
- 71.* На рисунке 74 $\angle AOB = \angle DOC$. Есть ли еще на этом рисунке равные углы? Ответ обоснуйте.
- 72.* Углы FOK и MOE равны (рис. 75). Равны ли углы FOM и KOE ?
- 73.* Луч BK является биссектрисой угла CBD , $\angle ABK = 146^\circ$ (рис. 76). Найдите угол CBD .
- 74.* Луч BK является биссектрисой угла CBD , $\angle CBD = 54^\circ$ (рис. 76). Найдите угол ABK .
- 75.* На сколько градусов поворачивается за 1 мин: 1) минутная стрелка; 2) часовая стрелка?
- 76.* Найдите угол между стрелками часов, если они показывают: 1) 3 ч; 2) 6 ч; 3) 4 ч; 4) 11 ч; 5) 7 ч.
- 77.* Угол ABC равен 30° , угол CBD — 80° . Найдите угол ABD . Сколько решений имеет задача?
- 78.* Найдите угол $МОК$, если $\angle MON = 120^\circ$, $\angle KON = 43^\circ$. Сколько решений имеет задача?
- 79.* Луч, проведенный из вершины прямого угла, делит его на два угла. Докажите, что угол между биссектрисами образовавшихся углов равен 45° .
- 80.* Как, имея шаблон угла, равного 70° , построить угол, равный 40° ?
- 81.* Как, имея шаблон угла, равного 40° , построить угол, равный: 1) 80° ; 2) 160° ; 3) 20° ?

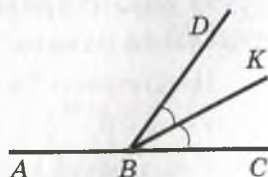


Рис. 76



- 82.* Как, используя шаблон угла, равного 13° , построить угол, равный 2° ?
- 83.* Как построить угол, равный 1° , используя шаблон угла, равного: 1) 19° ; 2) 7° ?
- 84.* Проведите шесть прямых, пересекающихся в одной точке. Верно ли, что среди образовавшихся при этом углов есть угол меньше 31° ?



НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

85. Не отрывая карандаша от бумаги, проведите через девять точек (рис. 77) четыре отрезка (возвращаться в исходную точку не обязательно).



Рис. 77

4. Смежные и вертикальные углы

Определение. Два угла называют **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

На рисунке 78 углы $\angle MOE$ и $\angle EON$ смежные.

Теорема 4.1. Сумма смежных углов равна 180° .

Доказательство. Пусть углы $\angle AOC$ и $\angle COB$ смежные (рис. 79). Надо доказать, что $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$.

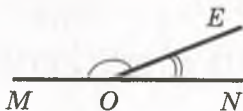


Рис. 78



Рис. 79

Поскольку углы $\angle AOC$ и $\angle COB$ смежные, то лучи OA и OB являются дополнительными. Тогда угол $\angle AOB$ развернутый. Следовательно, $\angle AOB = 180^\circ$. Луч OC принадлежит углу $\angle AOB$. По основному свойству величины угла имеем: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180^\circ$. ▲

Определение. Два угла называют **вертикальными**, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого.

На рисунке 80 углы AOB и COD вертикальные.

Очевидно, что при пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов, отличных от развернутого. На рисунке 80 углы AOC и BOD также вертикальные.

Теорема 4.2. Вертикальные углы равны.

Доказательство. ☉ Если вертикальные углы являются развернутыми, то они равны.

На рисунке 81 углы 1 и 2 вертикальные и отличные от развернутого. Надо доказать, что $\angle 1 = \angle 2$.

Каждый из углов 1 и 2 смежный с углом 3. Тогда $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ и $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Отсюда $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3$ и $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$. Получаем, что градусные меры углов 1 и 2 равны, а значит, равны и сами углы. ▲

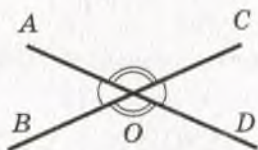


Рис. 80

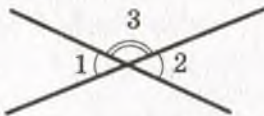


Рис. 81

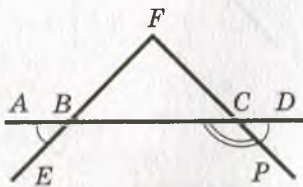


Рис. 82

Задача. На рисунке 82 $\angle ABE = \angle DCP$. Докажите, что $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$.

Решение. $\angle DCP + \angle BCP = 180^\circ$, так как углы DCP и BCP смежные. Углы DCP и ABE равны по условию. Углы ABE и FBC равны как вертикальные.

Следовательно, $\angle DCP = \angle FBC$. Тогда $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$. ●



1. Какие два угла называют смежными?
2. Чему равна сумма смежных углов?
3. Какие два угла называют вертикальными?
4. Сформулируйте теорему о свойстве вертикальных углов.



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

- 86.° Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них постройте смежный угол.
- 87.° Начертите два неравных смежных угла так, чтобы их общая сторона была вертикальной.



УПРАЖНЕНИЯ

- 88.° Укажите пары смежных углов (рис. 83).

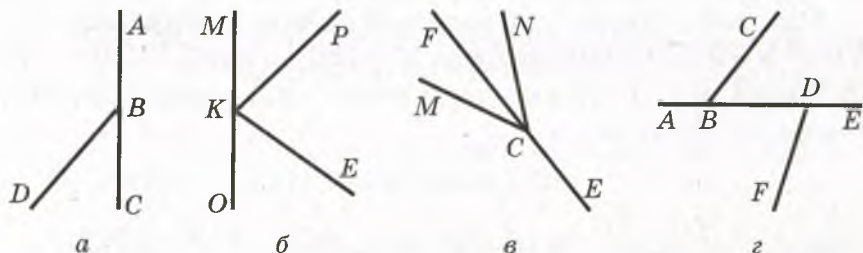


Рис. 83

- 89.° Являются ли углы ABC и DBE вертикальными (рис. 84)?

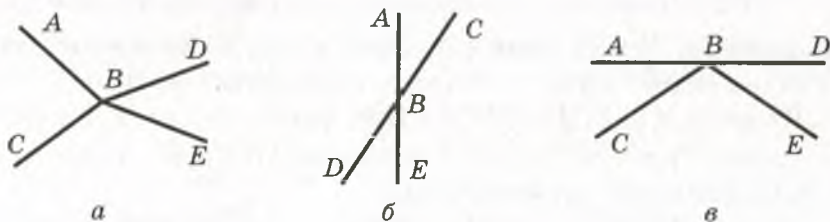


Рис. 84

- 90.° Сколько пар смежных углов изображено на рисунке 85? Назовите их. Укажите пары вертикальных углов.
- 91.° Могут ли два смежных угла быть равными: 1) 24° и 156° ; 2) 63° и 107° ? Ответ обоснуйте.

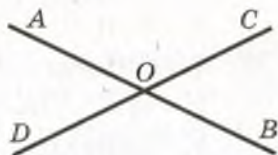


Рис. 85



- 92.* Найдите угол, смежный с углом: 1) 29° ; 2) 84° ; 3) 98° ; 4) 135° .
- 93.* Может ли пара смежных углов состоять:
- 1) из двух острых углов;
 - 2) из двух тупых углов;
 - 3) из прямого и тупого углов;
 - 4) из прямого и острого углов?
- 94.* Один из смежных углов прямой. Каким является второй угол?
- 95.* Найдите угол, смежный с углом ABC , если: 1) $\angle ABC = 36^\circ$; 2) $\angle ABC = 102^\circ$.
- 96.* Найдите углы 2, 3 и 4 (рис. 86), если $\angle 1 = 42^\circ$.
- 97.* Найдите смежные углы, если:
- 1) один из них на 70° больше другого;
 - 2) один из них в 8 раз меньше другого;
 - 3) их градусные меры относятся как 3 : 2.
- 98.* Найдите смежные углы, если:
- 1) один из них в 17 раз больше другого;
 - 2) их градусные меры относятся как 19 : 26.
- 99.* Верно ли утверждение:
- 1) для каждого угла можно построить только один вертикальный угол;
 - 2) для каждого угла, отличного от развернутого, можно построить только один смежный угол;
 - 3) если углы равны, то они вертикальные;
 - 4) если углы не равны, то они не вертикальные;
 - 5) если углы не вертикальные, то они не равны;
 - 6) если два угла смежные, то один из них острый, а второй — тупой;
 - 7) если два угла смежные, то один из них больше другого;
 - 8) если сумма двух углов равна 180° , то они смежные;
 - 9) если сумма двух углов не равна 180° , то они не смежные;
 - 10) если два угла равны, то смежные с ними углы также равны;

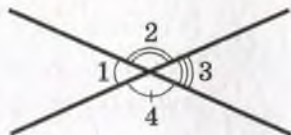


Рис. 86



- 11) если смежные углы равны, то они прямые;
- 12) если равные углы имеют общую вершину, то они вертикальные;
- 13) если два угла имеют общую сторону, то они смежные?

100.* Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 140° . Докажите, что эти углы вертикальные.

101.* Найдите углы, образованные при пересечении двух прямых, если:

- 1) сумма двух из них равна 106° ;
- 2) сумма трех из них равна 305° .

102.* Найдите углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна 64° .

103.* Три прямые пересекаются в одной точке (рис. 87). Найдите сумму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

104.* Прямые AB , CD и MK пересекаются в точке O (рис. 88), $\angle AOC = 70^\circ$, $\angle MOB = 15^\circ$. Найдите углы $\angle DOK$, $\angle AOM$ и $\angle AOD$.

105.* Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

106.* Найдите угол между биссектрисами вертикальных углов.

107.* Углы $\angle ABF$ и $\angle FBC$ смежные, $\angle ABF = 80^\circ$, луч BD принадлежит углу $\angle ABF$, $\angle ABD = 30^\circ$. Найдите угол между биссектрисами углов $\angle DBF$ и $\angle FBC$.

108.* Углы $\angle AOB$ и $\angle BOC$ смежные, луч OD — биссектриса угла $\angle AOB$, угол $\angle BOD$ на 18° меньше угла $\angle BOC$. Найдите углы $\angle AOB$ и $\angle BOC$.

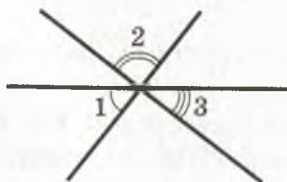


Рис. 87

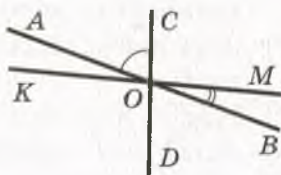


Рис. 88

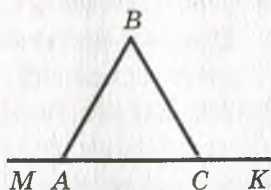


Рис. 89

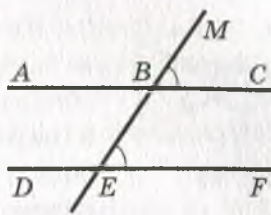


Рис. 90

- 109.* Найдите смежные углы $\angle MKE$ и $\angle PKE$, если угол $\angle FKE$ на 24° больше угла $\angle PKE$, где луч KF — биссектриса угла $\angle MKE$.
- 110.* На рисунке 89 $\angle MAB + \angle ACB = 180^\circ$. Докажите, что $\angle MAB = \angle KCB$.
- 111.* На рисунке 90 $\angle MBC = \angle BEF$. Докажите, что $\angle ABE + \angle BED = 180^\circ$.
- 112.* Два угла имеют общую сторону, а их сумма равна 180° . Можно ли утверждать, что эти углы смежные?



НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

113. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 91, на шесть частей двумя прямыми.



Рис. 91

5. Перпендикулярные прямые

На рисунке 92 отмечены четыре угла, которые образовались при пересечении прямых a и b . Легко показать (сделайте это самостоятельно), что если один из углов прямой (например, угол 1), то углы 2, 3 и 4 также прямые.

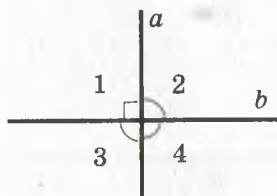


Рис. 92

Определение. Две прямые называются **перпендикулярными**, если при их пересечении образовался прямой угол.

На рисунке 92 прямые a и b перпендикулярны. Пишут: $a \perp b$ или $b \perp a$.

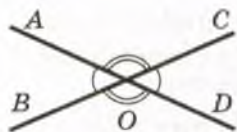


Рис. 93

На рисунке 93 прямые AD и BC не перпендикулярны. При их пересечении образовались пара равных острых углов и пара равных тупых углов. Величину образовавшегося острого угла называют углом между прямыми AD и BC .

Если прямые перпендикулярны, то считают, что угол между ними равен 90° .

Из сказанного следует, что угол между двумя прямыми не превышает 90° .

Определение. Два отрезка называют **перпендикулярными**, если они лежат на перпендикулярных прямых.

На рисунке 94 отрезки AB и CD перпендикулярны. Пишут: $AB \perp CD$.

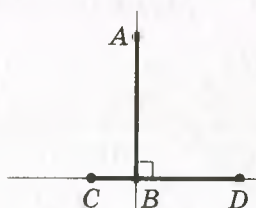
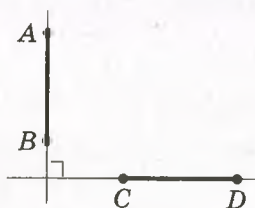
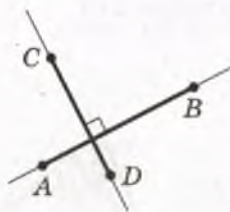


Рис. 94

Также можно рассматривать перпендикулярность двух лучей, луча и отрезка, прямой и луча, отрезка и прямой. Например, на рисунке 95 изображены перпендикулярные отрезок CD и луч AB .

На рисунке 96 изображены прямая a и перпендикулярный ей отрезок AB , конец B которого принадлежит прямой a .

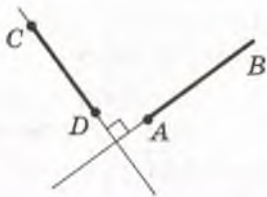


Рис. 95

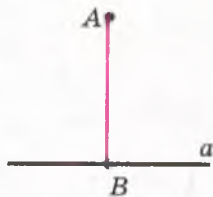


Рис. 96



В таком случае говорят, что из точки A на прямую a опустили перпендикуляр AB . Точку B называют основанием перпендикуляра AB .

Длину перпендикуляра AB называют расстоянием от точки A до прямой a . Если точка A принадлежит прямой a , то естественно считать, что расстояние от точки A до прямой a равно нулю.

На рисунке 97 изображен перпендикуляр OM , опущенный из точки O на прямую AB . Если основание этого перпендикуляра, точка M , принадлежит отрезку AB (лучу AB), то длину отрезка OM называют расстоянием от точки O до отрезка AB (луча AB).

Если точка принадлежит отрезку (лучу), то естественно считать, что расстояние от этой точки до отрезка (луча) равно нулю.

Опустим из точки A на прямую a перпендикуляр AB (рис. 98). Пусть X — произвольная точка прямой a , отличная от точки B . Отрезок AX называют наклонной, проведенной из точки A к прямой a .

Теорема 5.1. *Через каждую точку прямой проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.*

Доказательство. ☉ Отметим на прямой AB произвольную точку M и построим прямой угол CMB (рис. 99). Тогда $CM \perp AB$.

Предположим, что через точку M проходит еще одна прямая MD , отличная от CM и перпендикулярная прямой AB .

Рассмотрим случай, когда луч MD принадлежит углу CMB . Тогда по основному свойству величины угла $\angle CMB = \angle CMD + \angle DMB$. Отсюда $\angle CMB > \angle DMB$. Однако на самом

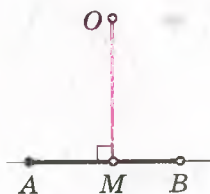


Рис. 97

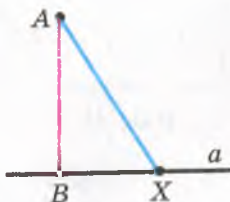


Рис. 98

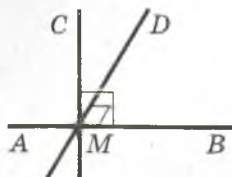


Рис. 99

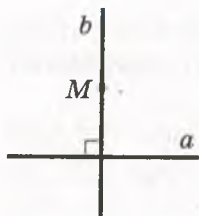
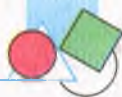


Рис. 100

деле $\angle CMB = \angle DMB = 90^\circ$. Следовательно, наше предположение неверно.

Аналогично рассматривают случай, когда луч MC принадлежит углу DMB . ▲

Вы умеете через произвольную точку M , не принадлежащую прямой a , проводить прямую b , перпендикулярную прямой a (рис. 100). То, что такая прямая b единственная, докажем в п. 7.



1. Какие две прямые называют перпендикулярными?
2. Каким символом обозначают перпендикулярные прямые?
3. Что называют углом между двумя пересекающимися прямыми?
4. Какие два отрезка называют перпендикулярными?
5. Что называют расстоянием от точки до прямой?
6. Сколько через каждую точку прямой можно провести прямых, перпендикулярных данной?



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

- 114.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 101. Пользуясь угольником, проведите через точку M прямую, перпендикулярную прямой a .

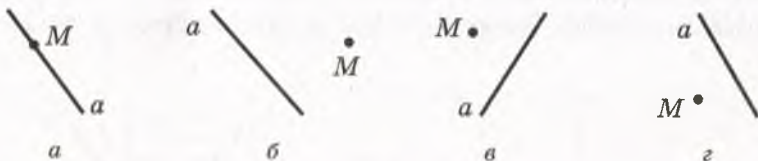


Рис. 101

- 115.° Проведите прямую c и отметьте на ней точку K . Пользуясь угольником, проведите через точку K прямую, перпендикулярную прямой c .



- 116.° Проведите прямую d и отметьте точку M , не принадлежащую ей. С помощью угольника проведите через точку M прямую, перпендикулярную прямой d .
- 117.° Начертите угол ABK , равный: 1) 73° ; 2) 146° . Отметьте на луче BK точку C и проведите через нее прямые, перпендикулярные прямым AB и BK .
- 118.° Начертите два перпендикулярных отрезка так, чтобы они: 1) пересекались и не имели общего конца; 2) не имели общих точек; 3) имели общий конец.
- 119.° Начертите два перпендикулярных луча так, чтобы они: 1) пересекались; 2) не имели общих точек.



УПРАЖНЕНИЯ

- 120.° На рисунке 102 прямые AC и DK перпендикулярны. Перпендикулярны ли: 1) отрезки AB и BK ; 2) отрезки BC и DF ; 3) лучи BC и BK ; 4) отрезок AB и луч FD ?
- 121.° Может ли угол между прямыми быть равным: 1) 1° ; 2) 80° ; 3) 90° ; 4) 92° ; 5) 101° ?
- 122.* Докажите, что если биссектрисы углов AOB и BOC перпендикулярны, то точки A , O и C лежат на одной прямой.
- 123.* На рисунке 103 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42^\circ$, $\angle MOC + \angle BOK = 130^\circ$. Найдите: 1) угол MOK ; 2) угол MOD .
- 124.* На рисунке 104 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54^\circ$. Найдите угол ABF .



Рис. 102

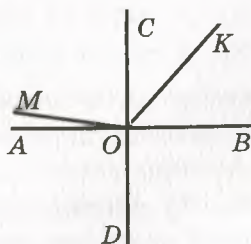


Рис. 103

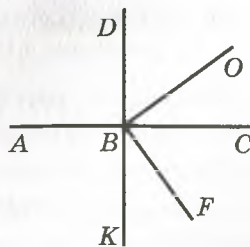


Рис. 104

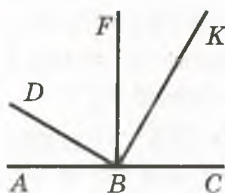


Рис. 105

125.* Угол ABC равен 160° , лучи BK и BM проходят между сторонами этого угла и перпендикулярны им. Найдите угол MBK .

126.* На рисунке 105 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Докажите, что $\angle ABD = \angle FBK$.

127.* На рисунке 105 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Докажите, что $BF \perp AC$.

128.* Из вершины угла ABC , равного 70° , проведены лучи BD и BF так, что $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, лучи BD и BC принадлежат углу ABF . Найдите углы DBF и ABF .

129.* Пользуясь угольником и шаблоном угла, равного 17° , постройте угол, равный: 1) 5° ; 2) 12° .

130.* Пользуясь угольником и шаблоном угла, равного 20° , постройте угол, равный 10° .



**НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ**

131. На рисунке 106 прямая пересекает все стороны восьмиугольника. Может ли прямая пересекать все стороны тринадцатиугольника, не проходя ни через одну из его вершин?



Рис. 106

6. Аксиомы

В предыдущих пунктах были доказаны четыре теоремы. Каждый раз, доказывая новое свойство фигуры, мы опирались на ранее известные геометрические факты. Например, при доказательстве теоремы о вертикальных углах было использовано свойство смежных углов. Руководствуясь этим принципом, мы докажем еще много новых теорем. Но уже сейчас,



на начальном этапе изучения геометрии, возникает естественный вопрос: если свойства геометрических фигур изучают по принципу «новое из старого», то должны существовать первоначальные факты, и тогда на чем основано доказательство их истинности? Ведь до них никаких истинных утверждений не было. Решить эту проблему можно единственным способом: принять первые свойства без доказательств. Так и поступают математики. Эти свойства называют **аксиомами**.

В качестве аксиом выбирают утверждения, которые просты, очевидны и не вызывают сомнений. Ведь недаром слово «аксиома» происходит от греческого «аксиос», что означает «достойный признания».

Некоторые аксиомы были сформулированы в предыдущих пунктах. Мы называли их **основными свойствами**.

Часть аксиом мы не выделяли каким-то специальным образом, а просто привели как наглядно очевидные утверждения. Так, в пп. 2, 3 были сформулированы следующие аксиомы:

для любых двух точек существует единственный отрезок, для которого эти точки являются концами;

каждый отрезок имеет определенную длину;

каждый угол имеет определенную величину.

Мы опирались и на некоторые другие истинные утверждения, принятые без доказательства, то есть, по сути, на аксиомы, которые, однако, не были сформулированы в явном виде. Например, в п. 1, описывая рисунок 13, мы фактически использовали такую аксиому:

какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

Аксиомы используют не только в математике. Нередко в обыденной жизни любое истинное утверждение, не требующее обоснования, называют аксиомой. Например, говорят: «После марта наступит апрель. Это аксиома».

Аксиомы возникают не только из практики или наблюдений.



Для каждого гражданина Украины Конституция — это список аксиом. Поэтому аксиому можно рассматривать как закон или правило. Но законы (правила игры) принимают, то есть они возникают в результате договоренности людей между собой. Следовательно, аксиомы геометрии можно также рассматривать как утвержденные правила, на основании которых геометры, как каменщики, строят здание науки (рис. 107).

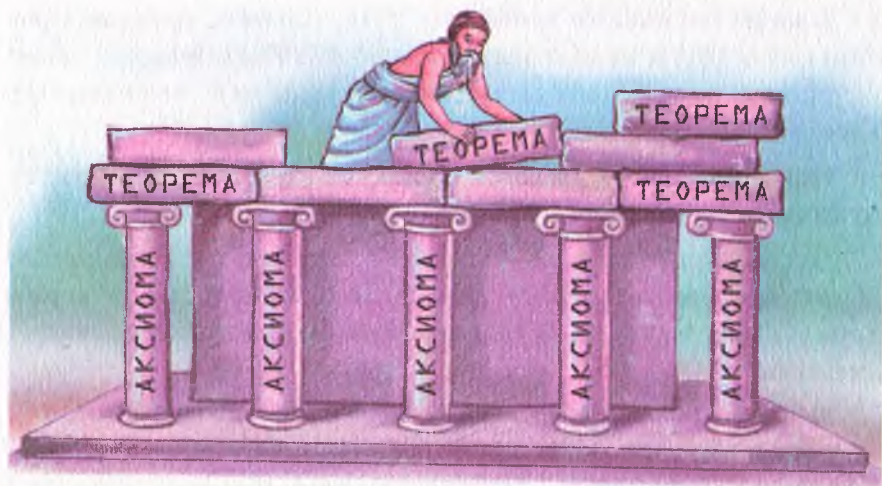


Рис. 107

Тогда у вас может возникнуть вопрос: «Неужели на геометрию можно смотреть как на игру, например такую, как шахматы?» В какой-то степени — да. Но при этом надо понимать, что шахматные правила, а значит, и сама игра возникли благодаря человеческой фантазии. Вместе с тем геометрические правила (аксиомы) возникли из практики и наблюдений. Поэтому геометрия, в отличие от шахмат, используется очень широко.

Если вы выберете профессию математика, то сможете ознакомиться с совершенно иными геометриями, которые отличаются от изучаемой в школе тем, что они строятся на других аксиомах.



ИЗ ИСТОРИИ ГЕОМЕТРИИ

Когда и где возникли первые геометрические сведения? Специалисты не отвечают на этот вопрос однозначно. Одни считают, что первооткрывателями были египетские и вавилонские землемеры, жившие за 4000 лет до н. э.; другие полагают, что геометрия зародилась в Древнем Египте 5000 лет назад.

Может показаться странным, но вопрос, когда возникла **наука геометрия**, не вызывает споров. Историки едины во мнении: в VI веке до н. э. Такое единодушие, на первый взгляд, может удивить:



Египетские пирамиды

ведь и до того времени народы древнего мира накопили огромный объем геометрических знаний. Например, совершенно очевидно, что без геометрического опыта египтяне не подарили бы миру одно из семи чудес света — пирамиды. И все-таки, почему обилие накопленных геометрических фактов неравносильно существованию геометрической науки?

Геометрия стала наукой лишь тогда, когда ее истины начали устанавливать путем доказательства.

Появление «доказательной геометрии» связано с именем первого из «семи мудрецов» — Фалеса Милетского¹ (ок. 625–547 гг. до н. э.) — философа, ученого, купца и государственного деятеля.

Задолго до Фалеса было известно, что вертикальные углы равны, что диаметр делит круг на две равные части. Никто в истинности этих фактов не сомневался.



Древний папирус



Фалес Милетский

¹ Милет — порт в Малой Азии на побережье Эгейского моря.

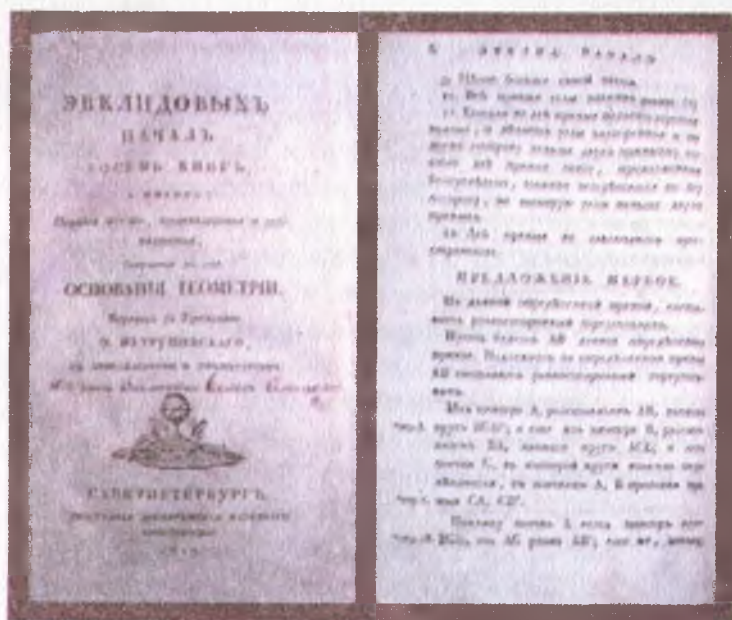


Евклид

А Фалес доказал их, тем самым прославив себя.

В VI–III вв. до н. э. благодаря ученым Древней Греции, таким как Пифагор, Евдокс, Архит, Теэтет, Евклид (Эвклид), Архимед, геометрия из прикладной науки превратилась в математическую теорию.

Книгу, по которой изучали геометрию более 2000 лет, без преувеличения можно назвать великой. Она называется «Начала», ее автор — Евклид (ок. 365–300 гг. до н. э.). К сожалению, о самом Евклиде мало что известно. В таких случаях личность обрастает легендами, одна из которых весьма поучительна. Царь Птолемей I спросил Евклида, существует ли более простой путь познания геометрии, чем изложенный в «Началах». Евклид ответил: «В геометрии нет царских дорог».



«Начала» Евклида



А какой же путь в геометрию избрал Евклид в своих «Началах»? Аксиоматический. В фундаменте науки — список простейших фактов. Их называют постулатами (от латинского *postulatum* — «требование») и аксиомами. Затем на их основе путем логических рассуждений доказывают все другие свойства — теоремы.

Постулатов у Евклида пять. Приведем первые четыре.

I постулат. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

II постулат. И чтобы каждую прямую можно было неограниченно продолжить.

III постулат. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любого радиуса.

IV постулат. И чтобы все прямые углы были равны.

О пятом постулате мы расскажем после п. 14.

На протяжении многих веков с «Началами» Евклида по популярности могла сравниться разве что Библия. Так, еще в конце XIX в. в ряде европейских стран геометрию преподавали по упрощенным изданиям «Начал».

И сейчас геометрия, которую изучают в школе, во многом следует идеям Евклида.

ЗАДАНИЕ № 1 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Сколько прямых определяют три точки, не лежащие на одной прямой?

А) 2; Б) 4; В) 3; Г) 1.

2. Сколько можно провести отрезков, содержащих две заданные точки?

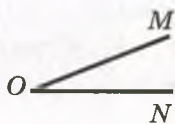
А) 1; Б) 2; В) 3; Г) бесконечно много.

3. Точка M является внутренней точкой отрезка PQ . Какое из следующих утверждений верно?

А) $PM + MQ = PQ$; В) $MQ = PQ + PM$;
Б) $PQ = PM - MQ$; Г) $PM = PQ + MQ$.



4. Точки A , B и C лежат на одной прямой, причем $BC = 8$ см, $AB - BC = 8$ см. Какое из следующих утверждений верно?
А) Точка A — середина отрезка BC ;
Б) точка B — середина отрезка AC ;
В) точка C — середина отрезка AB ;
Г) точки A и B совпадают.
5. Отрезок AB равен 12 см. Сколько на прямой AB существует точек, сумма расстояний от каждой из которых до концов отрезка AB равна 14 см?
А) Бесконечно много; Б) 1; В) 2; Г) ни одной.
6. Отрезок AB равен 12 см. Сколько на прямой AB существует точек, сумма расстояний от каждой из которых до концов отрезка AB равна 12 см?
А) Ни одной; Б) 2; В) бесконечно много; Г) 1.
7. Два луча являются дополнительными, если:
А) они имеют общее начало;
Б) их объединением является прямая и они имеют общее начало;
В) они принадлежат одной прямой;
Г) их объединением является прямая.
8. Какое обозначение угла, изображенного на рисунке, неверно?
А) $\angle O$; Б) $\angle MON$;
В) $\angle OMN$; Г) $\angle NOM$.
9. Какое из следующих утверждений неверно?
А) Смежные углы имеют общую вершину;
Б) смежные углы имеют общую сторону;
В) всегда один из смежных углов острый, а другой — тупой;
Г) если углы AOC и COB смежные, то лучи OA и OB дополнительные.
10. Какое из следующих утверждений неверно?
А) Вертикальные углы равны;
Б) если углы равны, то они вертикальны;
В) вертикальные углы имеют общую вершину;
Г) стороны вертикальных углов образуют две пары дополнительных лучей.





11. Какое из следующих утверждений верно?

- А) Перпендикулярные отрезки всегда имеют общую точку;
- Б) перпендикулярные лучи всегда имеют общую точку;
- В) перпендикулярные прямые всегда имеют общую точку;
- Г) перпендикулярные луч и отрезок всегда имеют общую точку.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 1

Основное свойство прямой

Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

Пересекающиеся прямые

Две прямые, имеющие общую точку, называют пересекающимися.

Теорема о двух пересекающихся прямых

Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

Равные отрезки

Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением.

Равные отрезки имеют равные длины, и наоборот, если длины отрезков равны, то равны и сами отрезки.

Основное свойство длины отрезка

Если точка C является внутренней точкой отрезка AB , то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB , то есть $AB = AC + CB$.

Расстояние между точками

Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB .

Дополнительные лучи

Два луча, имеющих общее начало и лежащих на одной прямой, называют дополнительными.

Развернутый угол

Угол, стороны которого являются дополнительными лучами, называют развернутым.



Равные углы

Два угла называют равными, если их можно совместить наложением.

Равные углы имеют равные величины, и наоборот, если величины углов равны, то равны и сами углы.

Биссектриса угла

Биссектрисой угла называют луч с началом в вершине угла, делящий этот угол на два равных угла.

Прямой, острый, тупой углы

Угол, градусная мера которого равна 90° , называют прямым.

Угол, градусная мера которого меньше 90° , называют острым.

Угол, градусная мера которого больше 90° , но меньше 180° , называют тупым.

Основное свойство величины угла

Если луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Смежные углы

Два угла называют смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

Свойство смежных углов

Сумма смежных углов равна 180° .

Вертикальные углы

Два угла называют вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого.

Свойство вертикальных углов

Вертикальные углы равны.

Перпендикулярные прямые

Две прямые называют перпендикулярными, если при их пересечении образовался прямой угол.

Теорема о прямой, перпендикулярной данной

Через каждую точку прямой проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.

Как, не накладывая один треугольник на другой, узнать, равны ли они? Какими свойствами обладают равнобедренный и равносторонний треугольники? Как «устроена» теорема? На эти и многие другие вопросы вы найдете ответы в данном параграфе.





7. Равные треугольники.

Высота, медиана, биссектриса треугольника

Рассмотрим три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой. Соединим их отрезками AB, BC, CA . Полученная фигура ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 108 зеленым цветом. Эту часть плоскости вместе с отрезками AB, BC и CA называют **треугольником**. Точки A, B, C называют **вершинами** треугольника, а отрезки AB, BC, CA — **сторонами** треугольника.

Треугольник называют и обозначают по его вершинам. Треугольник, изображенный на рисунке 108, обозначают так: $\triangle ABC$, или $\triangle BCA$, или $\triangle ACB$ (читают: «треугольник ABC », «треугольник BCA » и т. д.).

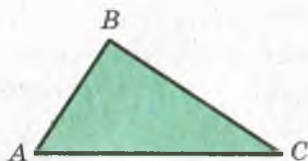


Рис. 108

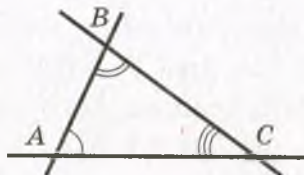


Рис. 109

Углы BAC, ABC, BCA (рис. 109) называют углами треугольника ABC .

В треугольнике ABC (рис. 109), например, угол B называют *углом, противолежащим стороне AC* , а углы A и C — *углами, прилежащими к стороне AC* , сторону AC — *стороной, противолежащей углу B* , стороны AB и AC — *сторонами, прилежащими к углу A* .

Определение. **Периметром** треугольника называют сумму длин всех его сторон.

Периметр обозначают буквой P . Например, для периметра треугольника MNK используют обозначение P_{MNK} .

Определения. Треугольник называют **остроугольным**, если все его углы острые.

Треугольник называют **прямоугольным**, если один из его углов прямой.



Треугольник называют **тупоугольным**, если один из его углов тупой (рис. 110).



Рис. 110

Определение. Два треугольника называют **равными**, если их можно совместить наложением.

На рисунке 111 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Записывают: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Эти треугольники можно совместить так, что вершины A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 совпадут. Тогда можно записать: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Те стороны и те углы, которые совмещаются при наложении равных треугольников, называют **соответственными сторонами** и **соответственными углами**. Так, на рисунке 111 стороны AC и A_1C_1 , углы A и A_1 соответственные.

Обычно на рисунках равные стороны отмечают одинаковым количеством черточек, а равные углы — одинаковым количеством дуг (рис. 111).

Заметим, что в равных треугольниках против соответственных углов лежат соответственные стороны, и наоборот, против соответственных сторон лежат соответственные углы.

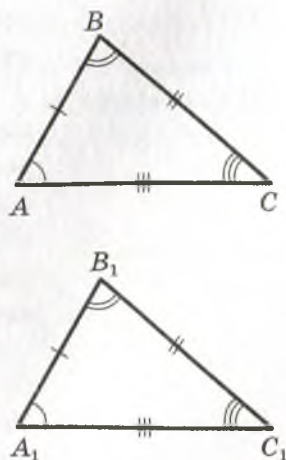


Рис. 111



Основное свойство равенства треугольников.

Для данного треугольника ABC и данного луча A_1M существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC , такой, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ и сторона A_1B_1 принадлежит лучу A_1M , а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой A_1M (рис. 112).

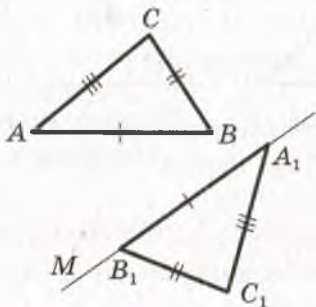


Рис. 112

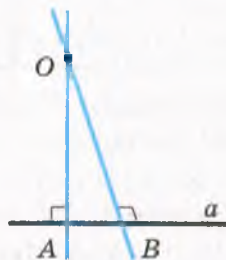


Рис. 113

Теорема 7.1. *Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.*

Доказательство. ☺ Рассмотрим прямую a и не принадлежащую ей точку O . Предположим, что через точку O проходят две прямые OA и OB , перпендикулярные прямой a (рис. 113).

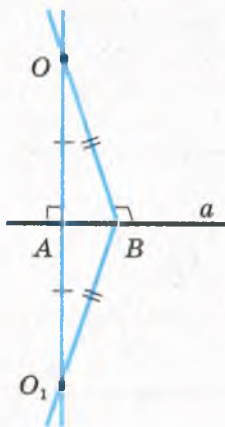


Рис. 114

В силу основного свойства равенства треугольников существует треугольник O_1AB , равный треугольнику OAB , такой, что $AO = AO_1$ и $BO = BO_1$ (рис. 114). Тогда $\angle OAB = \angle O_1AB$. Следовательно, $\angle O_1AB = 90^\circ$. Отсюда $\angle OAO_1 = 180^\circ$, а значит, точки O, A, O_1 лежат на одной прямой.

Аналогично доказывают, что точки O, B, O_1 также лежат на одной прямой. Но тогда прямые OA и OB имеют две точки пересечения: O и O_1 . А это противоречит теореме 1.1. Следовательно, наше



предположение неверно. Таким образом, через точку O проходит одна прямая, перпендикулярная прямой a . ▲

Возможно, вы заметили, что определения равных отрезков, равных углов и равных треугольников очень похожи. Поэтому целесообразно принять следующее определение равных фигур.

Определение. Две фигуры называют **равными**, если их можно совместить наложением.

На рисунке 115 изображены равные фигуры Φ_1 и Φ_2 . Пишут: $\Phi_1 = \Phi_2$.

Понятно, что любые две прямые (два луча, две точки) равны.

Определение. Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону, называют **высотой треугольника**.

На рисунке 116 отрезки BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC .

Определение. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называют **медианой треугольника**.

На рисунке 117 отрезок AM — медиана треугольника ABC .

Определение. Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называют **биссектрисой треугольника**.

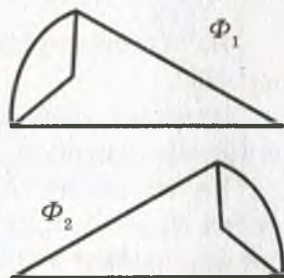


Рис. 115

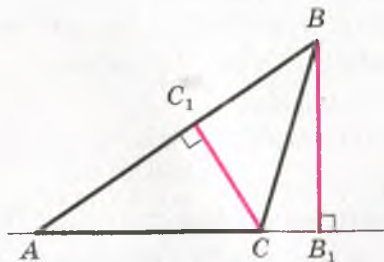


Рис. 116

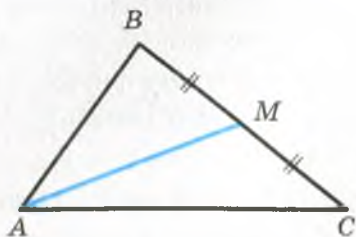


Рис. 117

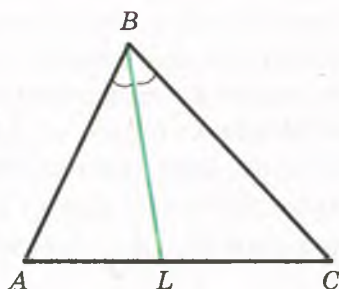


Рис. 118

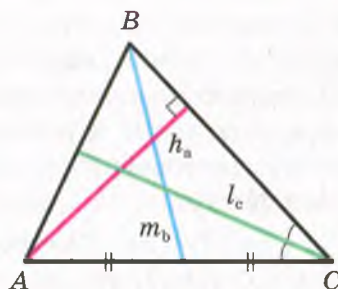


Рис. 119

На рисунке 118 отрезок BL — биссектриса треугольника ABC .

Каждый треугольник имеет три высоты, три медианы и три биссектрисы.

Часто длины сторон треугольника, противолежащих углам A, B, C , обозначают соответственно a, b, c . Длины высот обозначают h_a, h_b, h_c , медиан — m_a, m_b, m_c , биссектрис — l_a, l_b, l_c . Индекс показывает, к какой стороне проведен отрезок (рис. 119).

1. Как называют и обозначают треугольник?
2. Что называют периметром треугольника?
3. Какие существуют виды треугольников в зависимости от вида их углов?
4. Какой треугольник называют прямоугольным? тупоугольным? остроугольным?
5. Какие два треугольника называют равными?
6. Как называют те пары сторон и пары углов равных треугольников, которые совмещаются при наложении?
7. Какие две фигуры называют равными?
8. Что называют высотой треугольника?
9. Что называют медианой треугольника?
10. Что называют биссектрисой треугольника?
11. Сколько у каждого треугольника высот? медиан? биссектрис?



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

132.° Начертите треугольник:

- 1) остроугольный;
- 2) прямоугольный;
- 3) тупоугольный.

Проведите из каждой вершины треугольника высоту.

133.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 120, проведите высоту, общую для трех изображенных треугольников. У какого из них эта высота расположена вне треугольника?

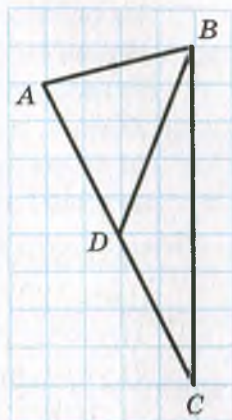
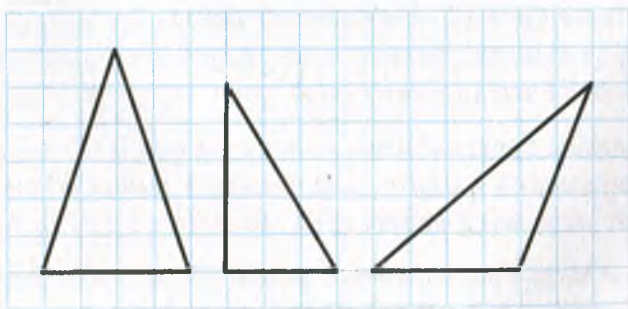


Рис. 120

134.° Перерисуйте в тетрадь треугольники, изображенные на рисунке 121, проведите в каждом из них все высоты.



а

б

в

Рис. 121

135.° Начертите произвольный треугольник и проведите все его медианы.

136.° Начертите произвольный треугольник и проведите все его биссектрисы.



УПРАЖНЕНИЯ

137.° Начертите произвольный треугольник, обозначьте его вершины буквами M , K и E . Укажите:

- 1) сторону, противоположащую углу M ;
- 2) угол, противоположащий стороне MK ;
- 3) стороны, прилежащие к углу K ;
- 4) углы, прилежащие к стороне KE .

138.° Запишите стороны, вершины, углы треугольника CEF (рис. 122). Укажите:

- 1) угол, противоположащий стороне CF ;
- 2) углы, прилежащие к стороне CE ;
- 3) сторону, противоположащую углу E ;
- 4) стороны, прилежащие к углу F .

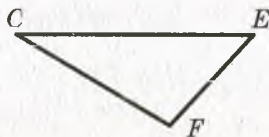


Рис. 122

139.° Одна из сторон треугольника в 5 раз меньше второй и на 25 см меньше третьей. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 74 см.

140.° Стороны треугольника относятся как $5 : 7 : 11$, а сумма наибольшей и наименьшей сторон равна 80 см. Вычислите периметр треугольника.

141.° Периметр треугольника равен 48 см, а его стороны относятся как $7 : 9 : 8$. Найдите стороны треугольника.

142.° Треугольники APK и MCE равны, углы A и C соответственные, $PK = 10$ см. Найдите сторону ME .

143.° Треугольники ABC и DEF равны, стороны AB и DE , BC и DF соответственные, $\angle B = 32^\circ$. Найдите угол D .

144.° Треугольники ABC и KTM равны, углы A и M , B и K соответственные, $\angle C = 40^\circ$, $MK = 5$ см. Найдите угол T и сторону AB .



145.° Верно ли утверждение:

- 1) если треугольники равны, то их периметры также равны;
- 2) если периметры двух треугольников равны, то и сами треугольники равны?

146.° Какие из элементов треугольника — биссектриса, медиана, высота — всегда принадлежат треугольнику?

147.° Какой из элементов треугольника — биссектриса, медиана, высота — может совпадать с его стороной? Укажите вид треугольника, для которого это возможно.

148.° 1) Может ли одна высота треугольника принадлежать ему, а две другие — нет?

2) Может ли только одна высота треугольника совпадать с его стороной?

3) В каком треугольнике три высоты пересекаются в его вершине?

149.* Медиана BD треугольника ABC разбивает его на два треугольника, периметры которых равны 32 см и 36 см. Найдите периметр треугольника ABC , если $BD = 10$ см.

150.* Медиана треугольника, периметр которого равен 60 см, разбивает его на два треугольника, периметры которых равны 36 см и 50 см. Чему равна длина этой медианы?



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

151. На рисунке 123 $KP = PE = EF = FT = 1$ см. Какие равные отрезки есть еще на этом рисунке? Найдите их длины.

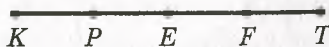


Рис. 123

152. Луч BD разбивает угол ABC , равный 72° , на два угла ABD и CBD так, что $\angle ABD = 5 \angle CBD$. Луч BK проходит так, что луч BA является биссектрисой угла DBK . Определите градусную меру и вид угла DBK .



**НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ**

153. Разрежьте каждую из фигур, изображенных на рисунке 124, на две равные фигуры (разрезать не обязательно по линиям сетки).

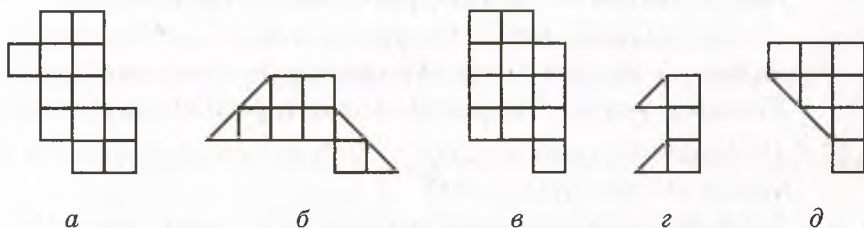


Рис. 124

8. Первый и второй признаки равенства треугольников

Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются шесть условий: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, то очевидно, что эти треугольники совпадут при наложении. Значит, они равны.

Попробуем уменьшить количество условий. Например, оставим лишь два равенства: $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. В этом случае треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ могут оказаться неравными (рис. 125).

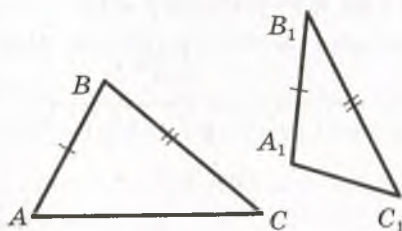


Рис. 125

Как же сократить список требований до минимума, но при этом сохранить равенство треугольников? На этот вопрос



отвечают теоремы, которые называют **признаками равенства треугольников**.

Теорема 8.1 (первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними). Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. ☉ Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 126). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы луч BA совместился с лучом B_1A_1 , а луч BC совместился с лучом B_1C_1 . Это можно сделать, так как по условию $\angle B = \angle B_1$. Поскольку по условию $BA = B_1A_1$ и $BC = B_1C_1$, то при таком наложении сторона BA совместится со стороной B_1A_1 , а сторона BC — со стороной B_1C_1 . Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совпадутся, значит, они равны. ▲

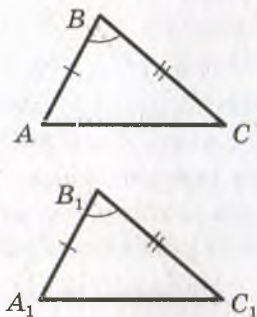


Рис. 126

Определение. Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют **серединным перпендикуляром** отрезка:

На рисунке 127 прямая a — серединный перпендикуляр отрезка AB . Заметим, что точки A и B равноудалены от прямой a .

Теорема 8.2. Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов этого отрезка.

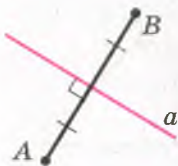


Рис. 127

Доказательство. ☉ Пусть X — произвольная точка серединного перпендикуляра a отрезка AB . Надо доказать, что $XA = XB$.

Пусть точка M — середина отрезка AB . Если точка X совпадает с точкой M (а это возможно, так как X — произвольная точка прямой a), то $XA = XB$.

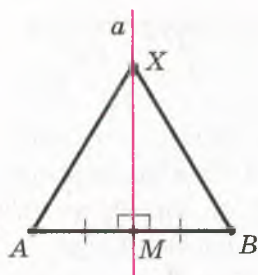


Рис. 128

Если точки X и M не совпадают, то рассмотрим треугольники AXM и BXM (рис. 128). В этих треугольниках $AM = MB$, так как точка M — середина отрезка AB , сторона XM — общая, $\angle AMX = \angle BMX = 90^\circ$. Следовательно, треугольники AXM и BXM равны по двум сторонам и углу между ними, то есть по первому признаку равенства треугольников. Значит, отрезки XA и XB равны как соответственные стороны равных треугольников. ▲

Теорема 8.3 (второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам). Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. ☺ Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 129). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совместились с точкой A_1 , отрезок AC — с отрезком A_1C_1 (это возможно, так как $AC = A_1C_1$) и точки B и B_1 лежали в одной полуплоскости относительно прямой A_1C_1 . Поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то луч AB совместится с лучом A_1B_1 , а луч CB — с лучом C_1B_1 . Тогда точка B — общая точка лучей AB и CB — совместится с точкой B_1 — общей точкой лучей A_1B_1 и C_1B_1 . Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, следовательно, они равны. ▲

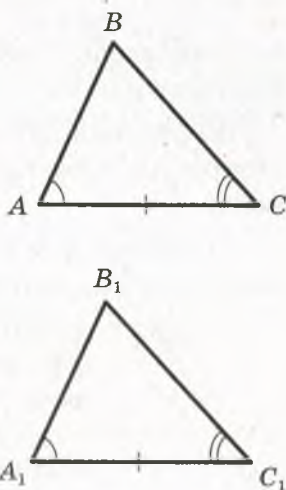


Рис. 129



Задача. На рисунке 130 точка O — середина отрезка BD , $\angle ABO = \angle CDO$. Докажите, что $BC = AD$.

Решение. Рассмотрим треугольники AOB и COD . Так как точка O — середина отрезка BD , то $BO = OD$. По условию $\angle ABO = \angle CDO$. Углы AOB и COD равны как вертикальные. Следовательно, $\triangle AOB = \triangle COD$ по стороне и двум прилежащим углам, то есть по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$ как соответственные стороны равных треугольников. Заметим, что BD — общая сторона треугольников ABD и CDB . Также по условию $\angle ABD = \angle CDB$. Следовательно, треугольники ABD и CDB равны по двум сторонам и углу между ними, то есть по первому признаку равенства треугольников. Тогда $BC = AD$. ●

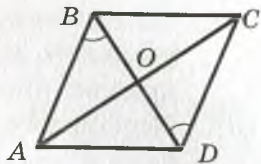


Рис. 130



1. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.
2. Какую прямую называют серединным перпендикуляром отрезка?
3. Каким свойством обладают точки серединного перпендикуляра отрезка?
4. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

- 154.° С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, две стороны которого равны 3 см и 6 см, а угол между ними — 40° .
- 155.° С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, две стороны которого равны 3 см и 4 см, а угол между ними — 90° . Укажите вид этого треугольника.
- 156.° С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, одна сторона которого равна 3 см, а углы, прилежащие к этой стороне, — 100° и 20° . Укажите вид этого треугольника.



157.° С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, одна сторона которого равна 6 см, а углы, прилежащие к этой стороне, — 90° и 45° .

158.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 131. С помощью угольника и линейки найдите на прямой l точку, равноудаленную от концов отрезка AB .

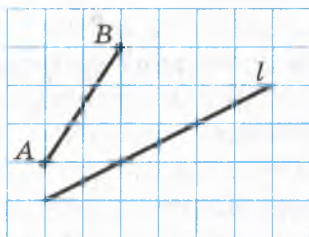


Рис. 131

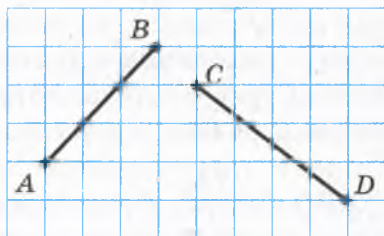


Рис. 132

159.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 132. С помощью угольника и линейки найдите точку, которая равноудалена от точек A и B и в то же время равноудалена от точек C и D .



УПРАЖНЕНИЯ

160.° На рисунке 133 $AC = DC$, $BC = EC$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DEC$.

161.° На рисунке 134 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.

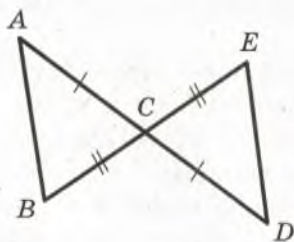


Рис. 133

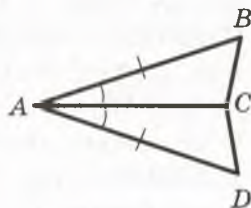


Рис. 134



162.° На рисунке 135 $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 7$ см, $\angle C = 34^\circ$. Найдите отрезок BC и угол A .

163.° На рисунке 136 $AO = OD$, $BO = OC$. Найдите сторону CD и угол OCD треугольника OCD , если $AB = 8$ см, $\angle OBA = 43^\circ$.

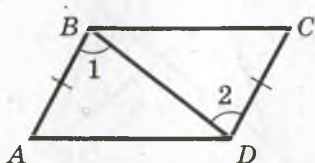


Рис. 135

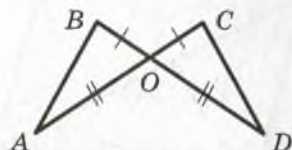


Рис. 136

164.° Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (рис. 137). Докажите, что $\angle OAD = \angle OCB$.

165.° Дано: $\angle ADC = \angle ADB$, $BD = CD$ (рис. 138). Докажите, что $AB = AC$.

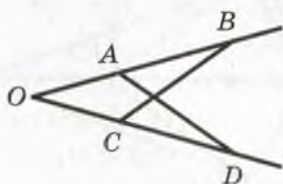


Рис. 137

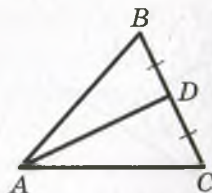


Рис. 138

166.° Из точек A и B , лежащих в одной полуплоскости относительно прямой a на одинаковом расстоянии от нее, опущены на эту прямую перпендикуляры AC и BD . Найдите угол ACB , если $\angle ADC = 25^\circ$.

167.° Отрезки AD и BC пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Найдите угол ACD , если $\angle ABC = 64^\circ$, $\angle ACO = 56^\circ$.

168.° На рисунке 139 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, точка O — середина отрезка BD . Докажите, что $\triangle ABO = \triangle CDO$.

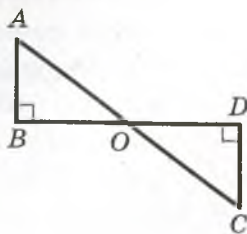


Рис. 139



169.° На рисунке 140 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см. Найдите стороны AD и CD треугольника ADC .

170.° На рисунке 141 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Докажите, что $\triangle BCO = \triangle EFO$.

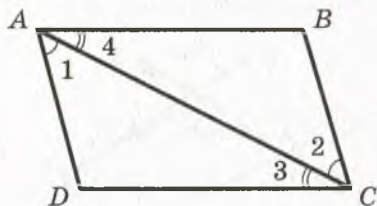


Рис. 140

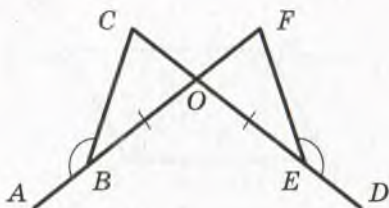


Рис. 141

171.° На рисунке 142 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

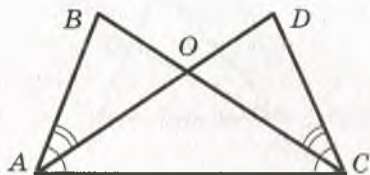


Рис. 142

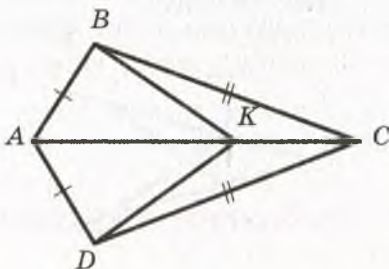


Рис. 143

172.° На сторонах угла с вершиной в точке B отмечены точки A и C , а на его биссектрисе — точка D так, что $\angle ADB = \angle CDB$. Докажите, что $AB = BC$.

173.° Через точку M , принадлежащую биссектрисе угла с вершиной в точке O , провели прямую, перпендикулярную этой биссектрисе. Эта прямая пересекает стороны данного угла в точках A и B . Докажите, что $AM = MB$.

174.° На рисунке 143 $\triangle ABC = \triangle ADC$. Докажите, что $\triangle ABK = \triangle ADK$.

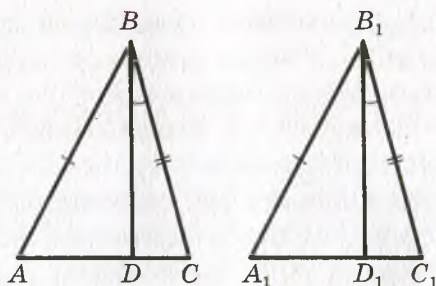


Рис. 144

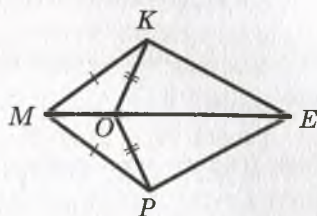


Рис. 145

175.* На рисунке 144 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Докажите, что $\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$.

176.* На рисунке 145 $\triangle MKO = \triangle MPO$. Докажите, что $\triangle KOE = \triangle POE$.

177.* На рисунке 146 $BM \perp AD$, $CK \perp AD$, $BM = CK$, $AM = KD$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CDA$.

🔑 178.* Докажите, что биссектрисы равных треугольников, проведенные из вершин соответственных углов, равны.

🔑 179.* Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к соответственным сторонам, равны.

180.* На продолжении медианы AM треугольника ABC за точку M отложен отрезок MK , равный AM . Найдите расстояние от точки K до вершины C , если $AB = 6$ см.

181.* Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся точкой пересечения пополам. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle BAD$.

182.* На рисунке 147 прямые m и n — серединные перпендикуляры сторон AB и AC треугольника ABC . Докажите, что точка O равноудалена от всех вершин данного треугольника.

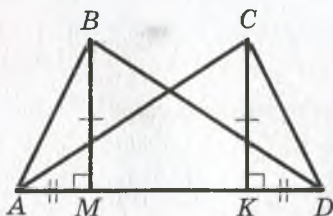


Рис. 146

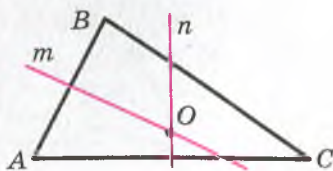


Рис. 147



- 183.* Для нахождения расстояния от точки B до колокольни A , расположенной на другом берегу реки (рис. 148), с помощью вешек, рулетки и астролябии отметили на местности точки C , D и E так, что B , C и D лежат на одной прямой, причем точка C является серединой отрезка BD . Потом наметили прямую AE , проходящую через точку C , причем $\angle ABC = \angle CDE$. Затем, измерив одну из сторон треугольника CDE , определили расстояние от B до A . Какую сторону измерили? Ответ обоснуйте.



Рис. 148

- 184.* Для определения ширины озера (рис. 149) на его берегу отметили точки A и B , а потом еще точки C , D и O так, чтобы точка O была общей серединой отрезков AC и BD . Как можно определить ширину озера? Ответ обоснуйте.

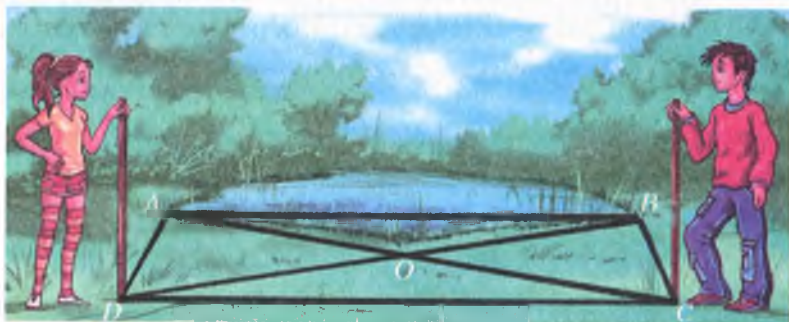


Рис. 149



- 185.** Докажите равенство двух треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углу между этой стороной и медианой.
- 186.** Докажите равенство двух треугольников по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.
- 187.** Докажите равенство двух треугольников по биссектрисе, углу, из вершины которого проведена эта биссектриса, и углу, образованному биссектрисой со стороной, к которой она проведена.
- 188.** Серединный перпендикуляр стороны BC треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D . Найдите отрезок AD , если $CD = 4$ см, $AB = 7$ см.
- 189.** Серединный перпендикуляр стороны AB треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M . Найдите длину стороны AC треугольника ABC , если $BC = 16$ см, а периметр треугольника AMC равен 26 см.
- 190.** На рисунке 150 $OA = OD$. Добавьте еще одно условие такое, чтобы треугольники AOC и DOB оказались равными:
1) по первому признаку равенства треугольников;
2) по второму признаку равенства треугольников.
- 191.** Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. На отрезке AC отмечена точка M , а на отрезке BD — точка K так, что $AM = BK$. Докажите, что: 1) $OM = OK$; 2) точки M , O и K лежат на одной прямой.
- 192.** На одной стороне угла с вершиной в точке O (рис. 151) отмечены точки A и B , а на другой — точки C и D так, что $OA = OC$, $AB = CD$. Докажите, что луч OM является биссектрисой угла BOD , где M — точка пересечения отрезков AD и BC .



Рис. 150

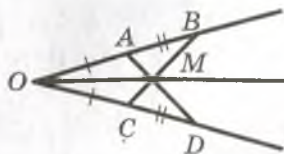


Рис. 151



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

193. Верно ли утверждение: если через каждые две из трех данных точек провести прямую, то получим три прямые?
194. Лучи OD и OF — биссектрисы смежных углов AOB и BOC соответственно, $\angle AOD : \angle FOC = 2 : 7$. Найдите углы AOD и FOC .



НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

195. Разделите каждую из фигур, изображенных на рисунке 152, по линиям сетки на четыре равные части так, чтобы в каждой части был ровно один кружок.

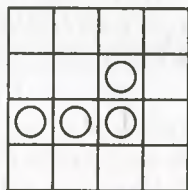
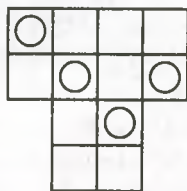


Рис. 152

9. Равнобедренный треугольник и его свойства

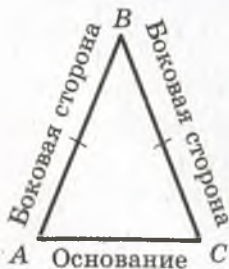


Рис. 153

Определение. Треугольник, у которого две стороны равны, называют **равнобедренным**.

На рисунке 153 изображен равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = BC$.

Равные стороны равнобедренного треугольника называют **боковыми сторонами**, а третью сторону — **основанием** равнобедренного треугольника.



Вершиной равнобедренного треугольника называют общую точку его боковых сторон (точка B на рисунке 153). При этом угол B называют **углом при вершине**, а углы A и C — **углами при основании** равнобедренного треугольника.

Определение. Треугольник, у которого все стороны равны, называют **равносторонним**.

На рисунке 154 изображен равносторонний треугольник ABC . Равносторонний треугольник — частный случай равнобедренного треугольника.

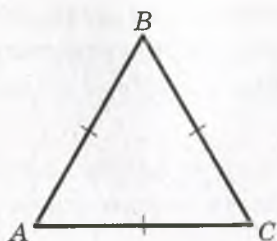


Рис. 154

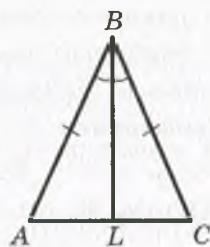


Рис. 155

Теорема 9.1 (свойства равнобедренного треугольника). В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) биссектриса треугольника, проведенная к его основанию, является медианой и высотой треугольника.

Доказательство. ☺ Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = BC$, отрезок BL — его биссектриса (рис. 155). Требуется доказать, что $\angle A = \angle C$, $AL = LC$, $BL \perp AC$.

В треугольниках ABL и CBL сторона BL — общая, $\angle ABL = \angle CBL$, так как по условию BL — биссектриса угла ABC , стороны AB и BC равны как боковые стороны равнобедренного треугольника. Следовательно, $\triangle ABL = \triangle CBL$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда можно сделать следующие выводы: 1) $\angle A = \angle C$; 2) $AL = LC$; 3) $\angle ALB = \angle CLB$.

Поскольку отрезки AL и LC равны, то отрезок BL — медиана треугольника ABC .



Углы ALB и CLB смежные, следовательно, $\angle ALB + \angle CLB = 180^\circ$. Учитывая, что $\angle ALB = \angle CLB$, получаем: $\angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$. Значит, отрезок BL — высота треугольника ABC . ▲

Из теоремы 9.1 следует, что:

- 1) в треугольнике против равных сторон лежат равные углы;
- 2) в равнобедренном треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведенные к его основанию, совпадают;
- 3) в равностороннем треугольнике все углы равны;
- 4) в равностороннем треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведенные из одной вершины, совпадают.

Определение. Если в треугольнике длины всех сторон различны, то такой треугольник называют **разносторонним**.

Задача. Отрезок AD — медиана равнобедренного треугольника ABC , проведенная к основанию. На сторонах AB и AC отмечены соответственно точки M и K так, что $BM = CK$. Докажите равенство треугольников AMD и AKD .

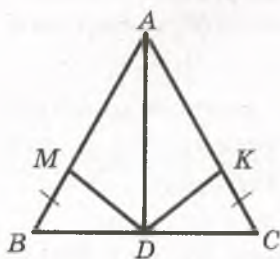


Рис. 156

Решение. Точка M принадлежит отрезку AB , а точка K — отрезку AC , следовательно, $AB = AM + BM$, $AC = AK + CK$ (рис. 156).

Поскольку $AB = AC$ и $BM = CK$, то $AM = AK$.

Углы BAD и CAD равны, поскольку медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является его биссектрисой.

Заметим, что AD — общая сторона треугольников AMD и AKD .

Следовательно, треугольники AMD и AKD равны по двум сторонам и углу между ними, то есть по первому признаку равенства треугольников. ●



1. Какие существуют виды треугольников в зависимости от количества равных сторон?
2. Какой треугольник называют равнобедренным? равносторонним? разносторонним?
3. Какие стороны равнобедренного треугольника называют боковыми?
4. Какую сторону равнобедренного треугольника называют основанием?
5. Сформулируйте свойство углов равнобедренного треугольника.
6. Сформулируйте свойство биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию.
7. Каким свойством обладают углы треугольника, лежащие против его равных сторон?
8. Сформулируйте свойство углов равностороннего треугольника.
9. Каким свойством обладают биссектриса, высота и медиана равностороннего треугольника, проведенные из одной вершины?



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

196.° Начертите:

- 1) разносторонний остроугольный треугольник;
- 2) равнобедренный прямоугольный треугольник;
- 3) равнобедренный тупоугольный треугольник.

197.° Начертите:

- 1) разносторонний прямоугольный треугольник;
- 2) разносторонний тупоугольный треугольник.

198.° Начертите равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 3 см, так, чтобы его угол при вершине был: 1) острым; 2) прямым; 3) тупым. В построенных треугольниках проведите высоты к боковым сторонам.



УПРАЖНЕНИЯ

- 199.° 1) Найдите периметр равнобедренного треугольника, основание которого равно 13 см, а боковая сторона — 8 см.
- 2) Периметр равнобедренного треугольника равен 39 см, а основание — 15 см. Найдите боковые стороны треугольника.
- 200.° Периметр равнобедренного треугольника равен 28 см, а боковая сторона — 10 см. Найдите основание треугольника.
- 201.° Найдите стороны равнобедренного треугольника, периметр которого равен 32 см, а основание на 5 см больше боковой стороны.
- 202.° Найдите стороны равнобедренного треугольника, периметр которого равен 54 см, а основание в 4 раза меньше боковой стороны.
- 203.° В равнобедренном треугольнике ABC сторона AC — основание, $\angle BCA = 40^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$, BD — медиана. Найдите углы треугольника ABD .
- 204.° На рисунке 157 $AB = BC$, BD — медиана треугольника ABC , $\angle ABD = 53^\circ$. Найдите углы ABC и ADE .
- 205.° На рисунке 158 $MK = KE$, $OE = 6$ см, $\angle MKE = 48^\circ$, $\angle POE = 90^\circ$. Найдите сторону ME и угол MKO .
- 206.° На рисунке 159 $AB = BC$, $\angle 1 = 140^\circ$. Найдите угол 2.
- 207.° Угол, вертикальный углу при вершине равнобедренного треугольника, равен 68° . Найдите угол между боковой стороной треугольника и медианой, проведенной к основанию.

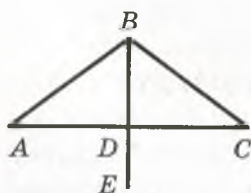


Рис. 157

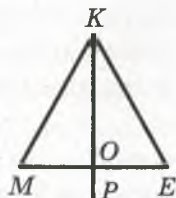


Рис. 158

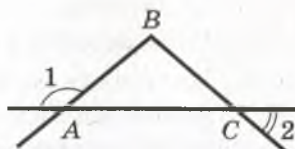


Рис. 159

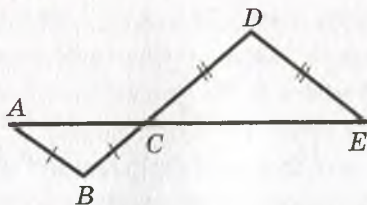


Рис. 160

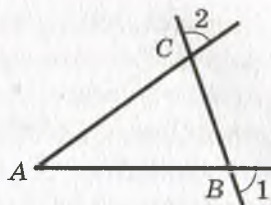


Рис. 161

- 208.°** Угол, смежный с углом при вершине равнобедренного треугольника, равен 76° . Найдите угол между боковой стороной треугольника и высотой, опущенной на основание.
- 209.°** На рисунке 160 $AB = BC$, $DC = DE$. Докажите, что $\angle A = \angle E$.
- 210.°** Прямая пересекает стороны угла A в точках B и C так, что $AB = AC$ (рис. 161). Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.
- 211.°** На рисунке 162 $AO = CO$, $\angle AOB = \angle COB$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 212.°** Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC , BD — его биссектриса, DM — биссектриса треугольника BDC . Найдите угол ADM .
- 213.°** Один ученик утверждает, что некоторый треугольник равнобедренный, а другой ученик — что этот треугольник равносторонний.
- 1) Могут ли оба ученика быть правыми?
 - 2) В каком случае прав только один ученик и какой именно?
- 214.°** Используя признаки равенства треугольников, докажите признак равенства равнобедренных треугольников по боковой стороне и углу при вершине.
- 215.°** Используя признаки равенства треугольников, докажите признак равенства равнобедренных треугольников по основанию и прилежащему к нему углу.
- 216.°** На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и K так, что точка M лежит между точками A и K , причем $AM = CK$. Докажите, что треугольник MBK равнобедренный.

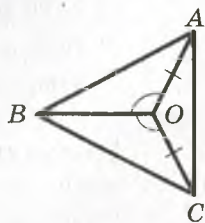


Рис. 162



- 217.*** В треугольнике MKE известно, что $MK = ME$. На стороне KE отмечены точки F и N так, что точка N лежит между точками F и E , причем $\angle KMF = \angle EMN$. Докажите, что $\angle MFN = \angle MNF$.
- 218.*** На боковых сторонах CA и CB равнобедренного треугольника ABC отложены соответственно равные отрезки CK и CM . Докажите, что: 1) $\triangle AMC = \triangle BKC$; 2) $\triangle AMB = \triangle BKA$.
- 219.*** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на медиане BD отметили произвольную точку M . Докажите, что: 1) $\triangle AMB = \triangle CMB$; 2) $\triangle AMD = \triangle CMD$.
- 220.*** Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные из вершин углов при основании, равны.
- 221.*** Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.
- 222.*** Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами равнобедренного треугольника.
- 223.*** Найдите третью сторону равнобедренного треугольника, если две другие его стороны равны 7 см и 4 см. Сколько решений имеет задача?
- 224.*** Одна из сторон равнобедренного треугольника равна 4 см. Найдите две другие стороны, если периметр треугольника равен 14 см.
- 225.*** Верно ли утверждение:
- 1) биссектриса равнобедренного треугольника является его высотой и медианой;
 - 2) биссектриса равностороннего треугольника является его высотой и медианой;
 - 3) если периметр треугольника в 3 раза больше одной из его сторон, то этот треугольник равносторонний?
- 226.*** На сторонах равностороннего треугольника ABC (рис. 163) отметили точки M , K и D так, что $AD = BM = CK$. Докажите, что треугольник MKD равносторонний.

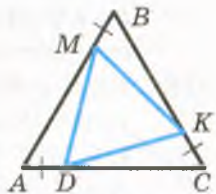


Рис. 163



227. На продолжениях сторон AB , BC , AC равностороннего треугольника ABC (рис. 164) за точки A , B и C соответственно отложили равные отрезки AD , BK и CE . Докажите, что треугольник DEK равносторонний.

228. Основание равнобедренного треугольника равно 20 см, а его медиана делит данный треугольник на два треугольника так, что периметр одного из них на 6 см меньше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника. Сколько решений имеет задача?

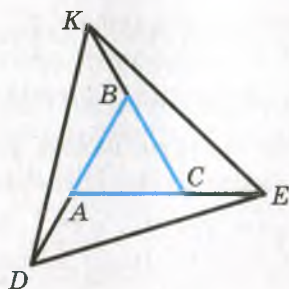


Рис. 164

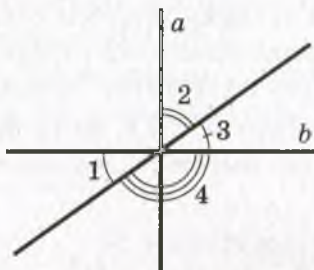


Рис. 165



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

229. На рисунке 165 $a \perp b$, $\angle 1 = 35^\circ$. Найдите углы 2, 3, 4.

230. Точки C и D разделили отрезок AB , длина которого равна a , на три отрезка AC , CD и DB так, что $AC = 2CD$, $CD = 2DB$. Найдите расстояние между: 1) точкой A и серединой отрезка CD ; 2) серединами отрезков AC и DB .

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

231. Нарисуйте шестиугольник, который можно одним разрезом разделить на два треугольника.



10. Признаки равнобедренного треугольника

В предыдущем пункте мы рассмотрели свойства равнобедренного треугольника. А как среди треугольников «распознавать» равнобедренные? На этот вопрос дают ответ следующие теоремы-признаки.

Теорема 10.1. *Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.*

Доказательство. ☉ Рассмотрим треугольник ABC , в котором отрезок BM — медиана и высота. Надо доказать, что $AB = BC$ (рис. 166).

Из условия теоремы следует, что прямая BM — серединный перпендикуляр отрезка AC .

Тогда по свойству серединного перпендикуляра $AB = BC$. ▲

Теорема 10.2. *Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.*

Доказательство. ☉ Рассмотрим треугольник ABC , в котором отрезок BL — биссектриса и высота. Надо доказать, что $AB = BC$ (рис. 167).

В треугольниках ABL и CBL сторона BL — общая, $\angle ABL = \angle CBL$ (так как по условию BL — биссектриса угла ABC), $\angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$ (так как по условию отрезок BL — высота). Следовательно, треугольники ABL и CBL равны по второму признаку равенства треугольников. Тогда стороны AB и BC равны как соответственные стороны равных треугольников. ▲

Теорема 10.3. *Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.*

Доказательство. ☉ Рассмотрим треугольник ABC , в котором $\angle A = \angle C$. Надо доказать, что $AB = BC$.

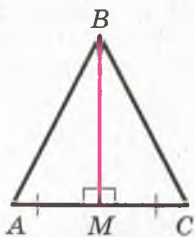


Рис. 166

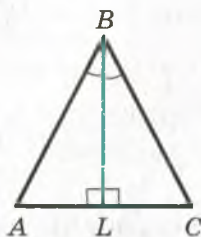


Рис. 167

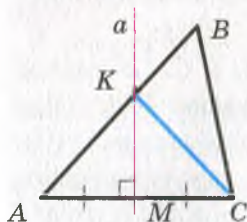


Рис. 168

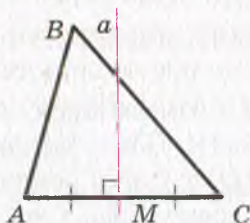


Рис. 169

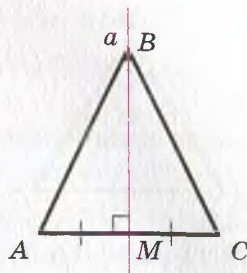


Рис. 170

Проведем серединный перпендикуляр a стороны AC . Докажем, что прямая a проходит через вершину B .

Предположим, что это не так. Тогда прямая a пересекает во внутренней точке или сторону AB (рис. 168), или сторону BC (рис. 169).

Рассмотрим первый из этих случаев. Пусть K — точка пересечения прямой a со стороной AB . Тогда по свойству серединного перпендикуляра (теорема 8.2) $AK = CK$. Следовательно, треугольник AKC равнобедренный, а значит, $\angle A = \angle ACK$. Но по условию $\angle A = \angle ACB$. Тогда имеем: $\angle ACB = \angle ACK$, что противоречит основному свойству величины угла (п. 3).

Аналогично получаем противоречие и для второго случая (рис. 169).

Следовательно, наше предположение неверно. Прямая a проходит через точку B (рис. 170). Тогда по свойству серединного перпендикуляра $BA = BC$. ▲

Из этой теоремы следует, что:

- 1) *в треугольнике против равных углов лежат равные стороны;*
- 2) *если в треугольнике все углы равны, то этот треугольник равнобедренный.*

Теорема 10.4. *Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.*

Доказательство. ☼ Рассмотрим треугольник ABC , в котором отрезок BM — медиана и биссектриса. Надо доказать, что $AB = BC$.

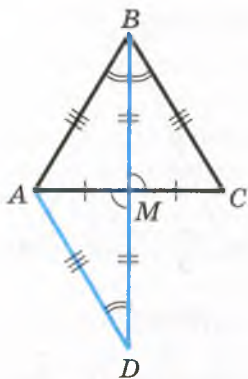


Рис. 171

На луче BM отложим отрезок MD , равный отрезку BM (рис. 171).

В треугольниках AMD и CMB имеем: $AM = MC$ (так как по условию BM — медиана), $BM = MD$ по построению; углы AMD и CMB равны как вертикальные. Следовательно, треугольники AMD и CMB равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда стороны AD и BC , углы ADM и CBM равны как соответственные элементы равных треугольников.

Поскольку BD — биссектриса угла ABC , то $\angle ABM = \angle CBM$. Поскольку $\angle CBM = \angle ADM$, то имеем: $\angle ABM = \angle ADM$. Тогда по признаку равнобедренного треугольника (теорема 10.3) получаем, что треугольник DAB равнобедренный, откуда $AD = AB$. И уже доказано, что $AD = BC$. Следовательно, $AB = BC$. ▲

Задача. В треугольнике ABC проведена биссектриса BM (рис. 172), $\angle BAK = 70^\circ$, $\angle AKC = 110^\circ$. Докажите, что $BM \perp AK$.

Решение. Поскольку углы BKA и AKC смежные, то $\angle BKA = 180^\circ - \angle AKC$. Тогда $\angle BKA = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Следовательно, в треугольнике ABK получаем, что $\angle BAK = \angle BKA = 70^\circ$. Поэтому треугольник ABK равнобедренный с основанием AK , и его биссектриса BO (O — точка пересечения AK и BM) является также высотой, то есть $BM \perp AK$. ●

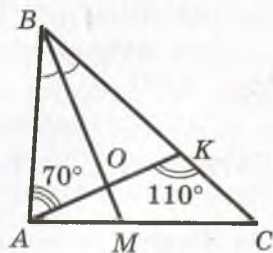


Рис. 172

1. Сформулируйте признаки равнобедренного треугольника.
2. Какова связь между равными углами и равными сторонами треугольника?
3. Что можно сказать о треугольнике, если все его углы равны?



УПРАЖНЕНИЯ

- 232.° В треугольнике ABC медиана BK перпендикулярна стороне AC . Найдите угол ABC , если $\angle ABK = 25^\circ$.
- 233.° Серединный перпендикуляр стороны AC треугольника ABC проходит через вершину B . Найдите угол C , если $\angle A = 17^\circ$.
- 234.° В треугольнике ABC известно, что $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, CK — высота. Найдите сторону AB , если $CK = 7$ см.
- 235.° На рисунке 173 $\angle AMK = \angle ACB$, $AK = MK$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 236.° Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A , пересекает его стороны в точках B и C . Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 237.° Биссектрисы AM и CK углов при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что треугольник AOC равнобедренный.
- 238.° В треугольнике ABC биссектриса BK является его высотой. Найдите периметр треугольника ABC , если периметр треугольника ABK равен 16 см и $BK = 5$ см.
- 239.* Верно ли утверждение:
- 1) если медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины, не совпадают, то этот треугольник не является равнобедренным;
 - 2) если биссектриса треугольника делит противоположащую сторону пополам, то этот треугольник равнобедренный?
- 240.* Медианы AE и CF , проведенные к боковым сторонам BC и AB равнобедренного треугольника ABC , пересекаются в точке M . Докажите, что треугольник AMC равнобедренный.

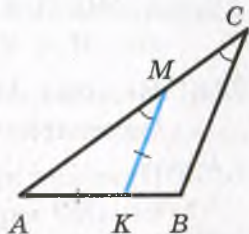


Рис. 173



- 241.*** Точки M и K принадлежат соответственно боковым сторонам AB и BC равнобедренного треугольника ABC , $AM = CK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O . Докажите, что треугольник AOC равнобедренный.
- 242.**** На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки D и E так, что $\angle EAC = \angle DCA$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F , $DF = EF$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 243.**** Через середину D стороны AB треугольника ABC проведем прямые, перпендикулярные биссектрисам углов ABC и BAC . Эти прямые пересекают стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Докажите, что $AM = BK$.
- 244.**** Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK . Найдите сторону AB , если $BC = 16$ см.
- 245.*** Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD , делит эту медиану пополам. Найдите отношение длин сторон AB и AC треугольника ABC .
- 246.**** В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 67,5^\circ$, $\angle B = 22,5^\circ$, CK — биссектриса треугольника ABC , CM — биссектриса треугольника BCK (рис. 174). Докажите, что точка M — середина отрезка AB .

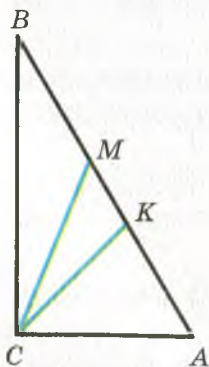


Рис. 174

- 247.*** Длины сторон треугольника, выраженные в сантиметрах, равны трем последовательным натуральным числам. Найдите стороны этого треугольника, если одна из его медиан перпендикулярна одной из его биссектрис.
- 248.*** В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$ см, $AC = 6$ см. На стороне BC отметили точку M такую, что $CM = 1$ см. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно биссектрисе угла ACB , пересекает отрезок AC в точке K ,



а прямая, проходящая через точку K перпендикулярно биссектрисе угла BAC , пересекает прямую AB в точке D . Найдите отрезок BD .



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

249. На прямой последовательно отметили точки A, B, C, D, E и F так, что $AB = BC = CD = DE = EF$. Найдите отношения $AB : CF$, $AB : BF$, $BD : AE$.
250. Найдите углы, образованные при пересечении двух прямых, если один из них на 42° больше половины другого угла.



НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

251. Разрежьте прямоугольник размером 4×9 на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

11. Третий признак равенства треугольников

Теорема 11.1 (третий признак равенства треугольников: по трем сторонам). Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. ☉ Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 175), у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (эти равенства указывают, какие стороны треугольников соответствуют друг другу). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Расположим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совмести-лась с вершиной A_1 , вершина B — с вершиной B_1 , а вершины C и C_1 лежали

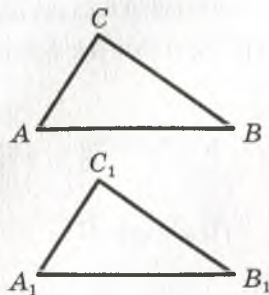


Рис. 175

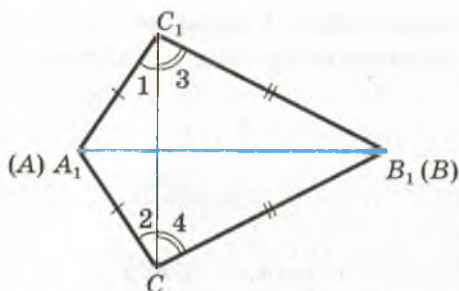


Рис. 176

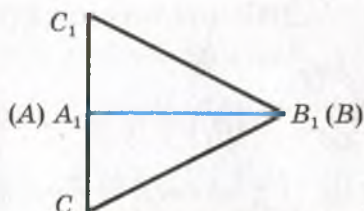


Рис. 177

в разных полуплоскостях относительно прямой AB (рис. 176). Проведем отрезок CC_1 . Поскольку $AC = A_1C_1$, то треугольник C_1A_1C равнобедренный, а значит, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично можно доказать, что $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Тогда треугольники $A_1C_1B_1$ и A_1CB_1 равны по двум сторонам и углу между ними, то есть по первому признаку равенства треугольников.

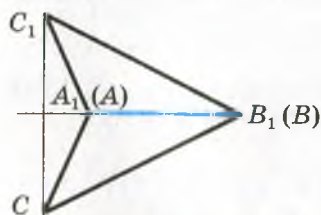


Рис. 178

Казалось бы, доказательство завершено. Однако мы рассмотрели лишь случай, когда отрезок CC_1 пересекает отрезок A_1B_1 во внутренней точке. На самом деле отрезок CC_1 может проходить через один из концов отрезка A_1B_1 , например через точку A_1 (рис. 177), или не иметь

общих точек с отрезком A_1B_1 (рис. 178). В каждом из этих случаев доказательства будут аналогичны приведенному. Проведите их самостоятельно. ▲



Рис. 179



Опоры линий электропередачи



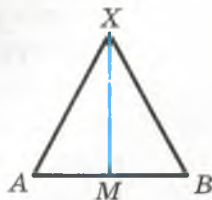
Телевизионная башня (г. Киев)

Рис. 180. Жесткие конструкции

Из третьего признака равенства треугольников следует, что *треугольник — жесткая фигура*. Действительно, если четыре рейки скрепить так, как показано на рисунке 179, а, то такая конструкция не будет жесткой (рис. 179, б, в). Если же добавить еще одну рейку, то получим два треугольника (рис. 179, г), и тогда конструкция станет жесткой. Этот факт широко используют на практике (рис. 180).

Теорема 11.2. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка.

Доказательство. ☺ Пусть точка X равноудалена от концов отрезка AB , то есть $XA = XB$ (рис. 181). Рассмотрим треугольники AXM и BXM , где точка M — середина отрезка AB . Тогда $\triangle AXM = \triangle BXM$ по трем сторонам, то есть по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle AMX = \angle BMX$. Сумма этих углов равна 180° , следовательно, каждый из них равен 90° . Значит, прямая XM — серединный перпендикуляр отрезка AB .

**Рис. 181**



Заметим, что мы рассмотрели случай, когда точка X не принадлежит прямой AB . Если точка X принадлежит прямой AB , то она совпадает с серединой отрезка AB , а значит, принадлежит его серединному перпендикуляру. ▲



1. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.
2. Где находятся точки, равноудаленные от концов отрезка?



УПРАЖНЕНИЯ

- 252.°** На рисунке 182 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.
- 253.°** На рисунке 183 $AC = AD$, $BC = BD$. Найдите угол BAC , если $\angle BAD = 25^\circ$.
- 254.°** Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и основание одного треугольника соответственно равны боковой стороне и основанию другого треугольника.

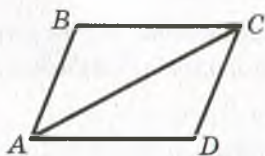


Рис. 182

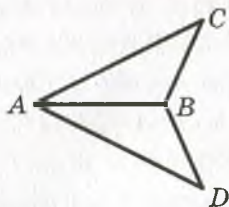


Рис. 183

- 255.°** Докажите, что два равносторонних треугольника равны, если сторона одного треугольника равна стороне другого треугольника.
- 256.°** На рисунке 184 $\triangle ABC = \triangle DCB$, причем $AB = CD$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle DCA$.
- 257.°** На рисунке 184 $AB = CD$, $AC = BD$. Докажите, что треугольник BOC равнобедренный.

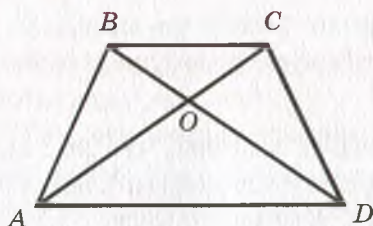


Рис. 184

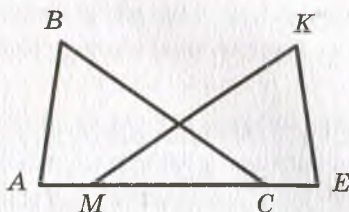


Рис. 185

- 258.°** Каждая из точек M и N равноудалена от концов отрезка AB . Докажите, что прямая MN — серединный перпендикуляр отрезка AB .
- 259.°** На рисунке 185 $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Докажите, что $\angle AMK = \angle BCE$.
- 260.°** На рисунке 186 $AB = CD$, $BC = AD$, BM — биссектриса угла ABC , DK — биссектриса угла ADC . Докажите, что $\triangle ABM = \triangle CDK$.
- 261.°** Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $OA = OD$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DCB$.
- 262.°** Отрезки BD и B_1D_1 — биссектрисы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
- 263.**** Коля утверждает, что ему удалось сделать рисунок, на котором $AB = AC$ и $AM = AN$ (рис. 187). Прав ли Коля?
- 264.**** Можно ли утверждать, что два треугольника равны, если каждой стороне одного треугольника равна некоторая сторона другого треугольника?
- 265.*** Докажите равенство двух треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

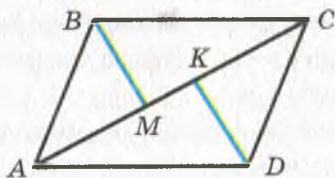


Рис. 186

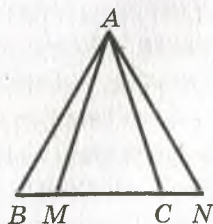


Рис. 187



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

266. На отрезке AB отметили точки C и D так, что $AC:BC = 7:8$, $AD:BD = 13:17$. Найдите длину отрезка AB , если расстояние между точками C и D равно 2 см.
267. Прямые AB и CD пересекаются в точке O , лучи OM и OK — биссектрисы соответственно углов AOC и BOC , образовавшихся при этом. Будет ли угол $МОК$ прямым?



НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

268. Квадрат разрезали по диагоналям на четыре треугольника (рис. 188). Сложите из этих треугольников два квадрата.



Рис. 188

12. Теоремы

Вы видите, что в учебнике появляется все больше и больше теорем. И это не удивительно: ведь геометрия в основном состоит из теорем и их доказательств.

Формулировки всех теорем, которые мы доказали, состоят из двух частей. Первую часть теоремы (то, что дано) называют **условием** теоремы, вторую часть теоремы (то, что требуется доказать) — **заключением** теоремы.

Например, в теореме 8.1 (первый признак равенства треугольников) условием является то, что *две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника*, а заключением — *равенство треугольников*.

Все известные вам теоремы можно условно разделить на **теоремы-свойства** и **теоремы-признаки**. Например, теорема 1.1 устанавливает свойство пересекающихся прямых, теорема 9.1 — свойство равнобедренного треугольника.



Теоремы-признаки перечисляют свойства, по которым можно распознать фигуру, то есть отнести ее к тому или иному виду (классу).

Так, теоремы-признаки равенства треугольников указывают требования, по которым два треугольника можно причислить к классу равных. Например, в теоремах 10.1–10.4 сформулированы свойства, по которым распознают равнобедренный треугольник.

Теоремы, которые следуют *непосредственно* из аксиом или теорем, называют **теоремами-следствиями**, или просто **следствиями**.

Например, свойство углов, противолежащих равным сторонам треугольника, является следствием из теоремы 9.1.

Если в теореме 8.2 о свойстве серединного перпендикуляра поменять местами условие и заключение, то получим теорему 11.2. Две теоремы, каждую из которых можно получить из другой, поменяв местами условие и заключение, называют **взаимно обратными**. Если какую-то из этих теорем назвать **прямой**, то вторую теорему будем называть **обратной**.

Меняя местами условие и заключение теоремы, надо быть очень внимательными: не всегда можно получить истинное утверждение. Например, утверждение, обратное теореме 4.1 о сумме смежных углов, неверно. Действительно, если сумма каких-то двух углов равна 180° , то совершенно не обязательно, чтобы эти углы были смежными.

Вы знаете, что справедливость теоремы устанавливают путем логических рассуждений, то есть доказательства.

Первая теорема этого учебника была доказана методом **от противного**. Название этого метода фактически отражает его суть. Мы предположили, что заключение теоремы 1.1 неверно. На основании этого предположения с помощью логических рассуждений мы получили факт, который противоречил основному свойству прямой.

Методом от противного также были доказаны и другие теоремы, например теоремы 5.1, 10.3.

Очень важно, чтобы доказательство теоремы было полным, то есть были рассмотрены все возможные случаи.



Так, полное доказательство теоремы 11.1 (третий признак равенства треугольников) потребовало рассмотрения трех возможных случаев.

Умение видеть все тонкости и нюансы доказательства — важнейшее качество, формирующее математическую культуру. Если бы, например, при доказательстве теоремы 8.2 о свойстве серединного перпендикуляра отрезка мы не рассмотрели отдельно случай, когда точка X является серединой отрезка AB , то для этого случая обращение к треугольникам $AХМ$ и $ВХМ$ было бы невозможным.

При доказательстве теоремы 10.4 (признак равнобедренного треугольника) мы использовали **прием дополнительного построения**: рисунок дополнили элементами, о которых не шла речь в условии теоремы. Этот метод является ключом к решению многих задач и доказательству ряда теорем. Поэтому очень важно научиться видеть «выгодное» дополнительное построение — то, которое поможет получить нужный результат.

А как приобрести такое «геометрическое зрение»? Вопрос непростой, и на него сложно ответить конкретными рекомендациями. Но все же мы советуем, во-первых, не быть равнодушными к геометрии, а полюбить этот красивый предмет; во-вторых, решать больше задач, чтобы развить интуицию и приобрести нужный опыт. Дерзайте!



1. Из каких двух частей состоит формулировка теоремы?
2. Как называют теорему, в которой перечислены свойства, позволяющие отнести фигуру к какому-то виду (классу)?
3. Как называют теорему, непосредственно следующую из аксиомы или другой теоремы?
4. Как называют пару теорем, в которых условие и заключение поменяли местами?
5. В чем состоит метод доказательства от противного?
6. Какие из теорем 1.1, 4.2, 5.1, 8.3 доказаны методом от противного?
7. В чем состоит прием дополнительного построения?



УПРАЖНЕНИЯ

269.° В теоремах 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 укажите условие и заключение теоремы.

270.° Из теорем 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 выберите: 1) теоремы-свойства; 2) теоремы-признаки.

271.° Сформулируйте утверждение, обратное данному:

- 1) если треугольник равносторонний, то его углы равны;
- 2) если два угла вертикальные, то их биссектрисы являются дополнительными лучами;
- 3) если угол между биссектрисами двух углов прямой, то эти углы смежные;
- 4) если сторона и противолежащий ей угол одного треугольника равны соответственно стороне и противолежащему ей углу другого треугольника, то эти треугольники равны.

Для каких из данных утверждений:

- 1) прямое и обратное утверждения истинны;
- 2) прямое утверждение истинно, а обратное — ложно;
- 3) прямое утверждение ложно, а обратное — истинно?

272.° Сформулируйте утверждение, обратное данному:

- 1) если точка B лежит между точками A и C , то $AB + BC = AC$;
- 2) если два треугольника не равны, то их периметры также не равны;
- 3) если градусная мера угла больше 90° , то он тупой.

Для каких из данных утверждений:

- 1) прямое и обратное утверждения истинны;
- 2) прямое утверждение истинно, а обратное — ложно;
- 3) прямое утверждение ложно, а обратное — истинно?

273.° Сформулируйте утверждение, отрицающее данное:

- 1) отрезок AB пересекает прямую m ;
- 2) градусная мера угла ABC больше 40° ;
- 3) из двух смежных углов хотя бы один не больше 90° ;
- 4) лучи OA и OB не являются дополнительными;
- 5) отрезок имеет только одну середину.



- 274.°** Сформулируйте утверждение, отрицающее данное:
- 1) угол ABC не является прямым;
 - 2) треугольник MKE равнобедренный;
 - 3) через точку на прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной;
 - 4) луч AC делит угол BAK пополам.
- 275.°** Докажите, используя метод от противного, что если ни одна из высот треугольника не совпадает с биссектрисой, проведенной из этой же вершины, то треугольник не является равнобедренным.
- 276.°** Докажите, используя метод от противного, что если стороны AB и BC треугольника ABC не равны, то его медиана BD не является его высотой.
- 277.°** Докажите методом от противного, что если разность двух углов равна 1° , то они не могут быть вертикальными.
- 278.°** Докажите методом от противного, что из двух смежных углов хотя бы один не меньше 90° .
- 279.°** Сформулируйте и докажите признак равенства равнобедренных треугольников по боковой стороне и медиане, проведенной к боковой стороне.
- 280.°** Сформулируйте и докажите признак равенства треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углу между медианой и этой стороной.
- 281.°** Докажите признак равенства треугольников по медиане и углам, на которые она разбивает угол треугольника.



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

- 282.** Отметьте на прямой точки A , B и C . Поставьте вместо многоточия один из знаков « $<$ », « $>$ » или « $=$ » так, чтобы образовалась правильная запись:
- 1) $AB + BC \dots AC$;
 - 2) $AB + AC \dots BC$;
 - 3) $AC + BC \dots AB$.



3. Два треугольника равны, если:

- А) две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника;
- Б) сторона и два угла одного треугольника равны стороне и двум углам другого треугольника;
- В) две стороны и угол одного треугольника равны двум сторонам и углу другого треугольника;
- Г) две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника.

4. Сколько пар равных треугольников изображено на рисунке?

- А) 1; В) 3;
- Б) 2; Г) 4.



5. Известно, что точка M — середина стороны AC треугольника ABC . На луче BM вне треугольника отложили отрезок ME , равный отрезку BM . Найдите EC , если $AB = 4,2$ см.

- А) 2,1 см; В) 4,8 см;
- Б) 4,2 см; Г) 8,4 см.

6. Какое из следующих утверждений истинно?

- А) Равнобедренный треугольник — частный случай разностороннего треугольника;
- Б) равносторонний треугольник — частный случай разностороннего треугольника;
- В) равносторонний треугольник — частный случай равнобедренного треугольника;
- Г) равнобедренный треугольник — частный случай равностороннего треугольника.

7. Какое из следующих утверждений ложно?

- А) Если высота треугольника делит сторону, к которой она проведена, на равные отрезки, то этот треугольник равнобедренный;
- Б) если медиана и биссектриса треугольника, проведенные из одной вершины, не совпадают, то этот треугольник не является равнобедренным;

- В) если треугольник равнобедренный, то длина любой его высоты равна длине любой его биссектрисы;
- Г) если два угла треугольника равны, то биссектриса третьего угла делит противоположающую сторону треугольника на равные отрезки.
8. Треугольник является равнобедренным, если:
- А) его сторона в три раза меньше его периметра;
Б) каждая его сторона в три раза меньше его периметра;
В) две его высоты равны;
Г) две его биссектрисы равны.
9. Периметр равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен 16 см. Периметр треугольника ABM , где точка M — середина отрезка AC , равен 12 см. Найдите медиану BM .
- А) 4 см; В) 2 см;
Б) 6 см; Г) 5 см.
10. Каждая из точек X и Y равноудалена от концов отрезка AB . Какое из следующих утверждений может быть ложным?
- А) Прямые XY и AB перпендикулярны;
Б) $\angle XAY = \angle XB\dot{Y}$;
В) $\angle AXB = \angle AYB$;
Г) $\angle AXY = \angle BXY$.
11. Точка M — середина отрезка AB . Точка X не принадлежит серединному перпендикуляру отрезка AB , если:
- А) $XA = XB$;
Б) $XM = XB$;
В) $XM \perp AB$;
Г) $\angle XAM = \angle XBM$.



ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 2

Равные фигуры

Две фигуры называют равными, если их можно совместить наложением.

Основное свойство равенства треугольников

Для данного треугольника ABC и данного луча A_1M существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC , такой, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ и сторона A_1B_1 принадлежит лучу A_1M , а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой A_1M .

Теорема о прямой, перпендикулярной данной

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.

Высота треугольника

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону, называют высотой треугольника.

Медиана треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называют медианой треугольника.

Биссектриса треугольника

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны, называют биссектрисой треугольника.

Первый признак равенства треугольников:

по двум сторонам и углу между ними

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

**Второй признак равенства треугольников:****по стороне и двум прилежащим к ней углам**

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников: по трем сторонам

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Серединный перпендикуляр отрезка

Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют серединным перпендикуляром отрезка.

Равнобедренный треугольник

Треугольник, у которого две стороны равны, называют равнобедренным.

Равносторонний треугольник

Треугольник, у которого все стороны равны, называют равносторонним.

Свойства равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) биссектриса треугольника, проведенная к его основанию, является медианой и высотой треугольника.

Признаки равнобедренного треугольника

- Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.
- Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.



Свойства треугольников, следующие из свойств и признаков равнобедренного треугольника

- В треугольнике против равных сторон лежат равные углы.
- В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.
- В равнобедренном треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведенные к его основанию, совпадают.
- В равностороннем треугольнике все углы равны.
- В равностороннем треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведенные из одной вершины, совпадают.
- Если в треугольнике все углы равны, то этот треугольник равносторонний.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

§3

Как установить параллельность двух прямых? Какими свойствами обладают параллельные прямые? Чему равна сумма углов любого треугольника? Какими свойствами обладает прямоугольный треугольник? Изучив материал этого параграфа, вы получите ответы на поставленные вопросы.



И ЧТОБЫ КАЖДЫЙ РАЗ,
КОГДА ПРЯМАЯ ПРИ
ПЕРЕСЕЧЕНИИ С ДВУМЯ
ДРУГИМИ ПРЯМЫМИ
ОБРАЗУЕТ С НИМИ
ОДНОСТОРОННИЕ УГЛЫ,
СУММА КОТОРЫХ МЕНЬШЕ
ДВУХ ПРЯМЫХ УГЛОВ, ЭТИ
ПРЯМЫЕ ПЕРЕСЕКАЛИСЬ
С ТОЙ СТОРОНЫ ОТ
СРЕЗУЩЕЙ, С КОТОРОЙ ЭТА
СУММА МЕНЬШЕ ДВУХ
ПРЯМЫХ УГЛОВ



13. Параллельные прямые

Определение. Две прямые называют **параллельными**, если они не пересекаются.

На рисунке 190 изображены параллельные прямые a и b . Пишут: $a \parallel b$ (читают: «прямые a и b параллельны» или «прямая a параллельна прямой b »).

Если два отрезка лежат на параллельных прямых, то их называют параллельными. На рисунке 191 отрезки AB и CD параллельны. Пишут: $AB \parallel CD$.

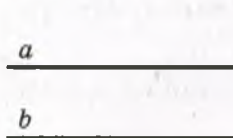


Рис. 190

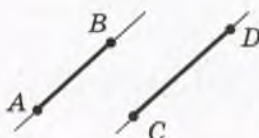


Рис. 191

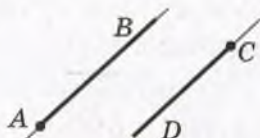


Рис. 192

Также можно говорить о параллельности двух лучей, луча и отрезка, прямой и луча, отрезка и прямой. Например, на рисунке 192 изображены параллельные лучи AB и CD .

Теорема 13.1 (признак параллельности прямых). Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

Доказательство. ☉ На рисунке 193 $a \perp c$ и $b \perp c$. Надо доказать, что $a \parallel b$.

Предположим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке M (рис. 194). Тогда через точку M , не принадлежащую прямой c , проходят две прямые a и b , перпендикулярные прямой c . Это противоречит тому, что через точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной (теорема 7.1). Значит, наше предположение неверно; следовательно, $a \parallel b$. ▲

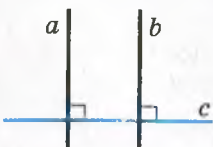


Рис. 193

Доказанная теорема разъясняет, почему с помощью линейки и угольника можно строить параллельные прямые так, как показано на рисунке 195.

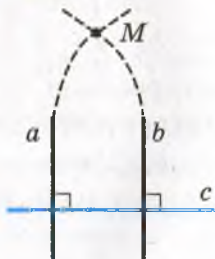


Рис. 194

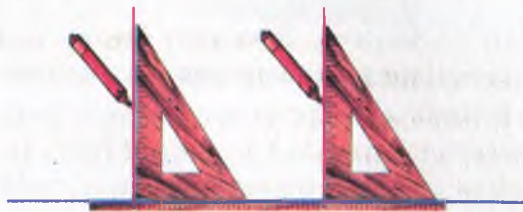


Рис. 195

Следствие. Через данную точку M , не принадлежащую прямой a , можно провести прямую b , параллельную прямой a .

Доказательство. Пусть точка M не принадлежит прямой a (рис. 196).

Проведем (например, с помощью угольника) через точку M прямую c , перпендикулярную прямой a . Теперь через точку M проведем прямую b , перпендикулярную прямой c . По признаку параллельности прямых (теорема 13.1) получаем, что $a \parallel b$.

Можно ли через точку M (рис. 196) провести еще одну прямую, параллельную прямой a ? Ответ на этот вопрос дает основное свойство параллельных прямых.

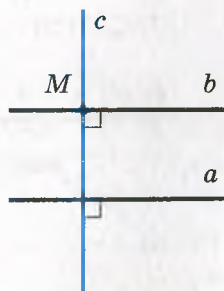


Рис. 196

Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельности прямых). Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Теорема 13.2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Доказательство. Пусть $b \parallel a$ и $c \parallel a$. Докажем, что $b \parallel c$.

Предположим, что прямые b и c не параллельны, а пересекаются в некоторой точке M (рис. 197). Получается, что через точку M проходят две прямые, параллельные прямой a ,



что противоречит аксиоме параллельности прямых. Значит, наше предположение неверно; следовательно, $b \parallel c$. ▲

Задача. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Решение. Пусть прямые a и b параллельны, прямая c пересекает прямую b в точке M (рис. 198). Предположим, что прямая c не пересекает прямую a , тогда $c \parallel a$. Но в этом случае через точку M проходят две прямые b и c , параллельные прямой a , что противоречит аксиоме параллельности прямых. Значит, наше предположение неверно; следовательно, прямая c пересекает прямую a . ●

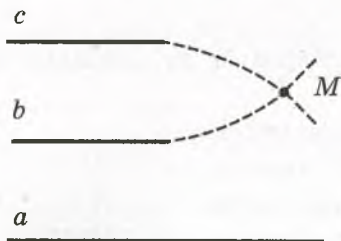


Рис. 197

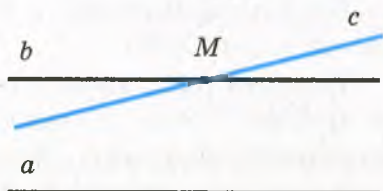


Рис. 198



1. Какие две прямые называют параллельными?
2. Каким символом обозначают параллельность прямых?
3. Как читают запись $m \parallel n$?
4. Какие отрезки называют параллельными?
5. Каково взаимное расположение двух прямых, перпендикулярных третьей прямой?
6. Сформулируйте аксиому параллельности прямых.
7. Каково взаимное расположение двух прямых, параллельных третьей прямой?
8. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то как эта прямая расположена относительно второй из них?



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

285.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 199. Проведите через каждую из точек A и B прямую, параллельную прямой m .

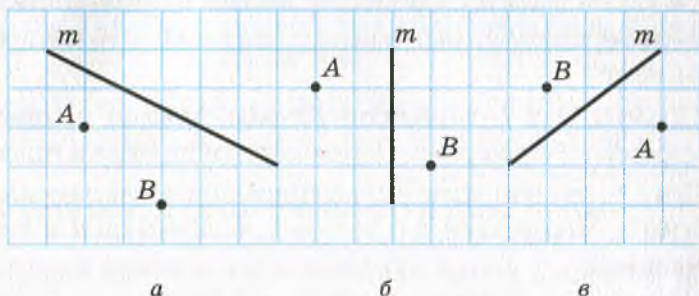


Рис. 199

286.° Начертите треугольник и проведите через каждую его вершину прямую, параллельную противоположной стороне.

287.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 200. Проведите через точку B прямую m , параллельную прямой AC , а через точку D — прямую n , параллельную прямой AC . Каково взаимное расположение прямых m и n ?

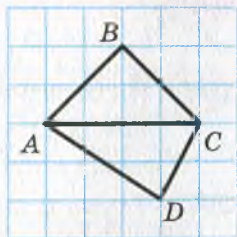


Рис. 200



УПРАЖНЕНИЯ

288.° Можно ли провести прямую, которая была бы параллельна каждой из пересекающихся прямых a и b ?

289.° Прямая a параллельна стороне AB треугольника ABC . Может ли прямая a быть параллельной стороне AC ? стороне BC ?

290.° Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую c , которая была бы параллельна прямой a и пересекала прямую b ?



- 291.°** Можно ли утверждать, что два отрезка параллельны, если они не имеют общих точек?
- 292.°** Можно ли утверждать, что существует только один луч, параллельный данной прямой, началом которого является данная точка?
- 293.*** Сколько можно провести отрезков, параллельных данной прямой, через точку, не принадлежащую этой прямой?
- 294.*** Прямые a и b перпендикулярны прямой c , прямая d пересекает прямую a . Пересекает ли прямая d прямую b ?
- 295.**** Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a , пересекает и прямую b , то прямые a и b параллельны.



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

- 296.** На отрезке AB отметили точки C и D так, что $AC = BD$. Точка O — середина отрезка CD . Найдите расстояние между точками C и D , если $AB = 21$ см, $AO : OD = 7 : 2$.
- 297.** Точка B принадлежит прямой AC , лучи BD и BF лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC , $\angle ABD = 80^\circ$, $\angle ABF = 150^\circ$, BM — биссектриса угла DBF . Найдите угол MBC .
- 298.** В треугольнике ABC медиана CM равна половине стороны AB , $\angle A = 47^\circ$, $\angle B = 43^\circ$. Чему равен угол ACB ?



НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

- 299.** Катя и Женя подошли к квадратному пруду, в середине которого находится квадратный остров (рис. 201). На берегу они нашли две доски, которые чуть-чуть короче ширины пролива между берегом пруда и островом. Как им попасть на остров, используя эти доски?



Рис. 201

14. Признаки параллельности двух прямых

Если две прямые a и b пересечь третьей прямой c , то образуется восемь углов (рис. 202). Прямую c называют секущей прямых a и b .

Углы 3 и 6, 4 и 5 называют **односторонними**.

Углы 3 и 5, 4 и 6 называют **накрест лежащими**.

Углы 6 и 2, 5 и 1, 3 и 7, 4 и 8 называют **соответственными**.

Теорема 14.1. Если накрест лежащие углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

Доказательство. ☺ На рисунке 203 прямая c является секущей прямых a и b , $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$.

Если $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ (рис. 204); то параллельность прямых a и b следует из признака параллельности прямых (теорема 13.1).

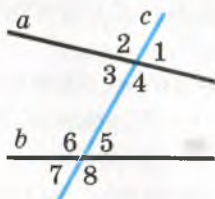


Рис. 202

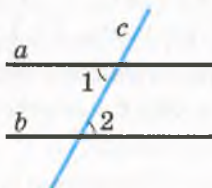


Рис. 203

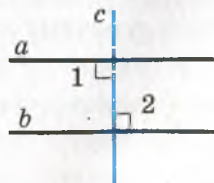


Рис. 204

Пусть теперь прямая c не перпендикулярна ни прямой a , ни прямой b . Обозначим A и B — точки пересечения прямой c с прямыми a и b соответственно. Отметим точку M — середину

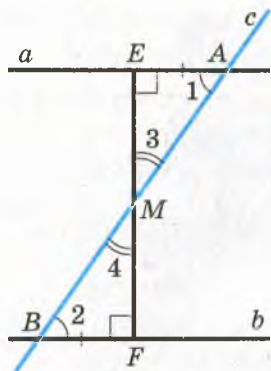


Рис. 205

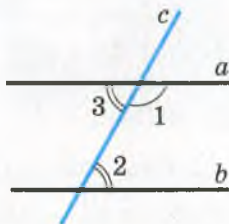


Рис. 206

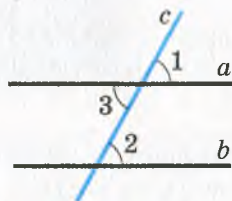


Рис. 207

отрезка AB (рис. 205). Через точку M проведем перпендикуляр ME к прямой a . Пусть прямая ME пересекает прямую b в точке F . Имеем: углы 1 и 2 равны по условию; углы 3 и 4 равны как вертикальные. Следовательно, треугольники AME и BMF равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, то есть по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle AEM = \angle MFB = 90^\circ$. Мы показали, что прямые a и b перпендикулярны прямой EF ; значит, они параллельны. ▲

Теорема 14.2. Если сумма односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180° , то прямые параллельны.

Доказательство. ☉ На рисунке 206 прямая c является секущей прямых a и b , $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Докажем, что $a \parallel b$.

Углы 1 и 3 смежные, следовательно, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Поскольку $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, то $\angle 2 = \angle 3$. А углы 2 и 3 накрест лежащие, поэтому в силу теоремы 14.1 $a \parallel b$. ▲

Теорема 14.3. Если соответственные углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

Доказательство. ☉ На рисунке 207 прямая c является секущей прямых a и b , $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$.

Углы 1 и 3 равны как вертикальные. Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 = \angle 3$. Но углы 2 и 3 накрест лежащие. Поэтому согласно признаку параллельности двух прямых (теорема 14.1) $a \parallel b$. ▲

Задача. На рисунке 208 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

Решение. Для треугольников ABD и CDB имеем: $AB = CD$ и $\angle ABD = \angle CDB$ по условию, BD — общая сторона. Значит, треугольники ABD и CDB равны по двум сторонам и углу между ними, то есть по первому признаку равенства треугольников.

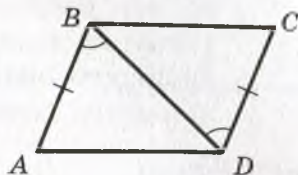


Рис. 208

Тогда $\angle BDA = \angle DBC$. Поскольку углы BDA и DBC — накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей BD и эти углы равны, то $BC \parallel AD$. ●



1. Какими должны быть накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?
2. Какими должны быть односторонние углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?
3. Какими должны быть соответственные углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

300.° Проведите две прямые AB и CD . Проведите прямую MK , пересекающую каждую из прямых AB и CD . Обозначьте точку пересечения прямых AB и MK буквой O , а прямых CD и MK — буквой E . Заполните пропуски в тексте:

- 1) углы AOM и ... — соответственные;
- 2) углы AOE и ... — соответственные;
- 3) углы AOE и ... — накрест лежащие;
- 4) углы AOE и ... — односторонние.

Укажите, какими углами (соответственными, накрест лежащими или односторонними) являются:

- 1) $\angle BOM$ и $\angle DEM$; 2) $\angle BOE$ и $\angle DEM$; 3) $\angle BOE$ и $\angle OEC$.



301.° Начертите две прямые и проведите их секущую. Пронумеруйте углы, образованные при пересечении данных прямых секущей. Укажите среди этих углов все пары:

- 1) соответственных углов;
- 2) односторонних углов;
- 3) накрест лежащих углов.



УПРАЖНЕНИЯ

302.° На рисунке 209 укажите все пары накрест лежащих, односторонних и соответственных углов.

303.° Запишите, какие углы на рисунке 210 являются:

- 1) односторонними при прямых BC и AD и секущей AB ;
- 2) односторонними при прямых CE и CD и секущей AD ;
- 3) накрест лежащими при прямых BC и AD и секущей CE ;
- 4) соответственными при прямых CE и CD и секущей AD ;
- 5) односторонними при прямых BC и AD и секущей CE .

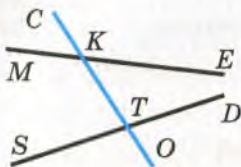


Рис. 209

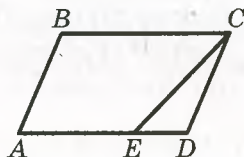
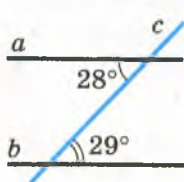
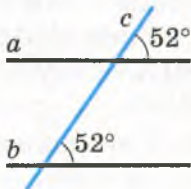


Рис. 210

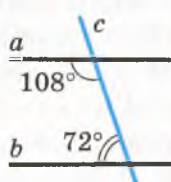
304.° На каких из рисунков 211, а–г прямые a и b параллельны?



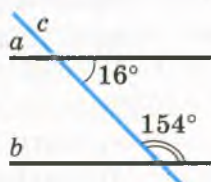
а



б



в



г

Рис. 211

305.° Параллельны ли изображенные на рисунке 212 прямые a и b , если:

- 1) $\angle 3 = \angle 6$;
- 2) $\angle 2 = \angle 6$;
- 3) $\angle 4 = 125^\circ$, $\angle 6 = 55^\circ$;
- 4) $\angle 2 = 35^\circ$, $\angle 5 = 146^\circ$;
- 5) $\angle 1 = 98^\circ$, $\angle 6 = 82^\circ$;
- 6) $\angle 1 = 143^\circ$, $\angle 7 = 37^\circ$?

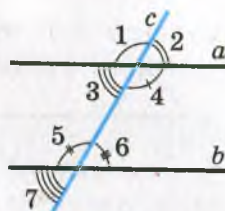


Рис. 212

306.° На каких из рисунков 213, a – $г$ прямые m и n параллельны?

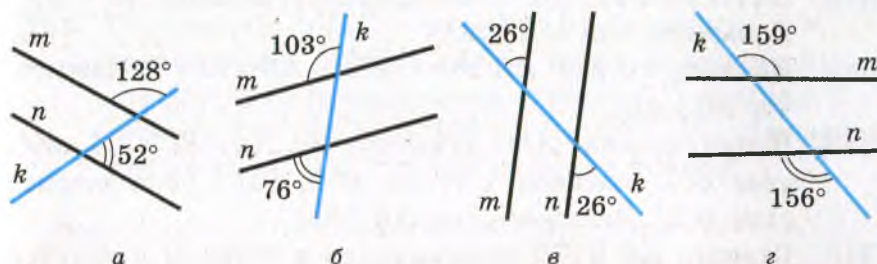


Рис. 213

307.° На рисунке 214 укажите все пары параллельных прямых.

308.° Запишите, какие прямые на рисунке 215 являются параллельными, если $\angle 1 = 53^\circ$, $\angle 2 = 128^\circ$, $\angle 3 = 127^\circ$.

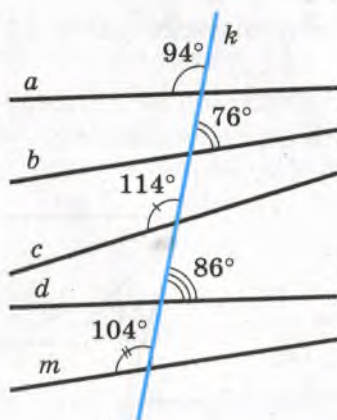


Рис. 214

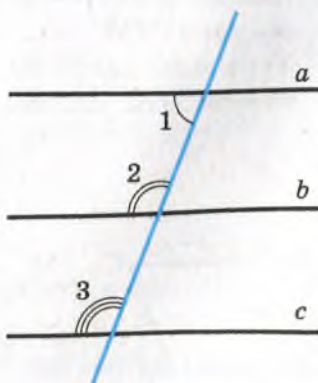


Рис. 215

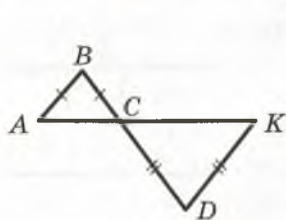


Рис. 216

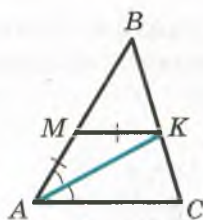


Рис. 217

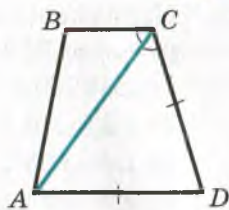


Рис. 218

- 309.°** На рисунке 216 $AB = BC$, $CD = DK$. Докажите, что $AB \parallel DK$.
- 310.°** На рисунке 217 AK — биссектриса угла BAC , $AM = MK$. Докажите, что $MK \parallel AC$.
- 311.°** На рисунке 218 $\angle ACB = \angle ACD$, $AD = CD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.
- 312.°** В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle A = 60^\circ$, угол BCD смежный с углом ACB , CM — биссектриса угла BCD . Докажите, что $AB \parallel CM$.
- 313.°** Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$.
- 314.°** На рисунке 219 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.
- 315.°** На рисунке 220 изображены прямые a , b и k . Известно, что некоторая прямая t пересекает прямую a . Пересекает ли прямая t прямую b ?
- 316.°** Каково взаимное расположение прямых CD и EF на рисунке 221?
- 317.°** Угол ABC равен 60° , а угол BCD — 120° . Можно ли утверждать, что прямые AB и CD параллельны?

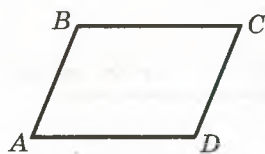


Рис. 219

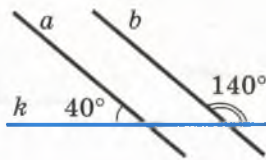


Рис. 220

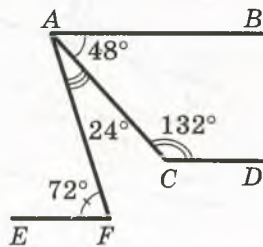


Рис. 221

- 318."** Угол между прямыми a и c равен углу между прямыми b и c . Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны?
- 319."** Из восьми углов, образованных при пересечении прямых a и b прямой c , четыре угла равны по 40° , а остальные четыре угла — по 140° . Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны?
- 320."** Прямая пересекает биссектрису BM треугольника ABC в точке O , являющейся серединой отрезка BM , а сторону BC — в точке K . Докажите, что если $OK \perp BM$, то $MK \parallel AB$.
- 321."** Отрезки AM и CK — медианы треугольника ABC . На продолжении отрезка AM за точку M отложен отрезок MF , а на продолжении отрезка CK за точку K — отрезок KD так, что $MF = AM$, $KD = CK$. Докажите, что точки B , D и F лежат на одной прямой.



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

- 322.** Луч OC разбивает угол AOB на два угла так, что $\angle AOC : \angle BOC = 3:5$. Найдите угол между лучом OC и биссектрисой угла, смежного с углом AOB , если угол BOC на 42° больше угла AOC .

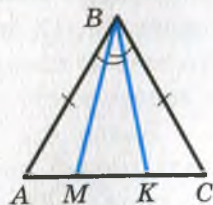


Рис. 222

- 323.** На рисунке 222 $AB = BC$, $\angle ABK = \angle CBM$. Докажите, что $BM = BK$.
- 324.** Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC . Прямая BD пересекает отрезок AC в точке E . Докажите, что $AE = EC$.



НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

- 325.** Приведите пример, когда общей частью (пересечением) треугольника и четырехугольника является восьмиугольник.



ПЯТЫЙ ПОСТУЛАТ ЕВКЛИДА

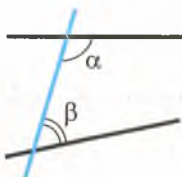
В п. 6 вы узнали, что в качестве аксиом выбирают очевидные утверждения. Тогда почему бы, например, теоремы 1.1 и 5.1 не включить в список аксиом, ведь они тоже очевидны? Ответ на этот вопрос понятен: если какое-то утверждение можно доказать с помощью аксиом или уже доказанных теорем, то это утверждение — теорема, а не аксиома.

С этой точки зрения очень поучительна история, связанная с пятым постулатом Евклида (напомним, что в рассказе «Из истории геометрии» мы сформулировали четыре первых постулата).

V постулат. И чтобы каждый раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, эти прямые пересекались с той стороны от секущей, с которой эта сумма меньше двух прямых углов (рис. 223).

Можно показать, что пятый постулат и сформулированная нами в п. 13 аксиома параллельности прямых равносильны, то есть из постулата следует аксиома, и наоборот, из аксиомы следует постулат.

Более двадцати веков многие ученые пытались доказать пятый постулат, то есть вывести его из других аксиом Евклида. Лишь в начале XIX в. несколько математиков независимо друг от друга пришли к выводу: утверждение, что *через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной*, является аксиомой.



$$\alpha + \beta < 180^\circ$$

Рис. 223

Вам может показаться, что в этом выводе ничего особенного нет: присоединяем аксиому параллельности к уже существующему списку аксиом-правил, а дальше доказываем теоремы.

Однако если в футболе добавить хотя бы одно правило, например разрешить полевым игрокам играть и руками, то мы получим совершенно другую игру.

Если пятый постулат — это правило, которое мы принимаем, а не теорема, то его можно заменить другим правилом — утверждением, противоположным ему.

Так и поступил выдающийся русский математик, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792–1856). Он заменил лишь одно правило — аксиому параллельности прямых — другим: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную*. Новая аксиома позволила построить новую геометрию — неевклидову.

С подобной идеей несколько позже выступил венгерский математик Янош Бойяи (1802–1860).



Н. И. Лобачевский

15. Свойства параллельных прямых

Теорема 15.1 (обратная теореме 14.1). *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны.*

Доказательство. ☉ На рисунке 224 прямые a и b параллельны, прямая c — секущая. Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$.

Предположим, что $\angle 1 \neq \angle 2$. Тогда через точку K проведем прямую a_1 так, чтобы $\angle 3 = \angle 2$ (рис. 224). Углы 3 и 2 являются накрест лежащими при прямых a_1 и b и секущей c . Тогда по признаку параллельности двух прямых (теорема 14.1) $a_1 \parallel b$. Получили, что через точку K проходят две прямые, параллельные прямой b . Это противоречит аксиоме параллельности прямых. Таким образом, наше предположение неверно; следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. ▲

Теорема 15.2 (обратная теореме 14.3). *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару соответственных углов, равны.*

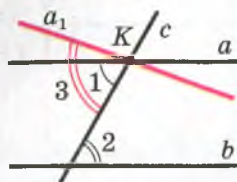


Рис. 224



Доказательство. ☉ На рисунке 225 прямые a и b параллельны, прямая c — секущая. Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$.

По свойству параллельных прямых (теорема 15.1) углы 3 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей c . Но углы 3 и 1 равны как вертикальные. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. ▲

Теорема 15.3 (обратная теореме 14.2). Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180° .

Доказательство. ☉ На рисунке 226 прямые a и b параллельны, прямая c — секущая. Докажем, что $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

По свойству параллельных прямых (теорема 15.1) углы 3 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей c . Но углы 3 и 1 смежные, поэтому $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. ▲

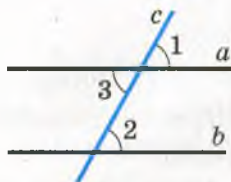


Рис. 225

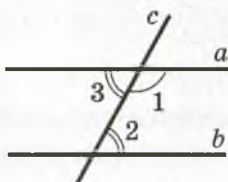


Рис. 226

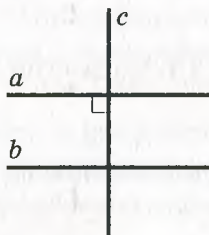


Рис. 227

Следствие. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой (рис. 227).

Докажите это следствие самостоятельно.

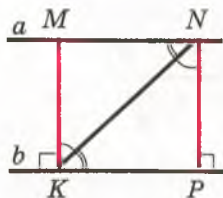


Рис. 228

🔑 **Задача 1.** Докажите, что все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

Решение. Пусть прямые a и b параллельны (рис. 228), M и N — две произвольные точки прямой a . Опустим из них перпендикуляры MK и NP на прямую b . Докажем, что $MK = NP$.

Рассмотрим треугольники MKN и PNK . Отрезок KN — их общая сторона. Поскольку $MK \perp b$ и $NP \perp b$, то $MK \parallel NP$, а углы MKN и PNK равны как накрест лежащие при параллельных прямых MK и NP и секущей KN .

Аналогично углы MNK и PNK равны как накрест лежащие при параллельных прямых MN и KP и секущей KN .

Следовательно, треугольники MKN и PNK равны по стороне и двум прилежащим углам, то есть по второму признаку равенства треугольников. Тогда $MK = NP$. ●

Определение. Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной из прямых до другой прямой.

Например, на рисунке 228 длина отрезка MK — это расстояние между параллельными прямыми a и b .

Задача 2. На рисунке 229 отрезок AK — биссектриса треугольника ABC , $MK \parallel AC$. Докажите, что треугольник AMK равнобедренный.

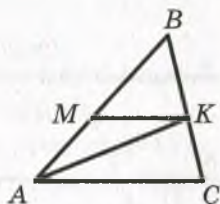


Рис. 229

Решение. Поскольку AK — биссектриса треугольника ABC , то $\angle MAK = \angle KAC$.

Углы KAC и MKA равны как накрест лежащие при параллельных прямых MK и AC и секущей AK . Следовательно, $\angle MAK = \angle MKA$.

Тогда треугольник AMK равнобедренный. ●



1. Каким свойством обладают накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей?
2. Каким свойством обладают соответственные углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей?
3. Каким свойством обладают односторонние углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей?



4. Известно, что прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых. Обязательно ли она перпендикулярна другой прямой?
5. Что называют расстоянием между двумя параллельными прямыми?



УПРАЖНЕНИЯ

326.° На рисунке 230 найдите угол 1.

327.° На рисунке 231 найдите угол 2.

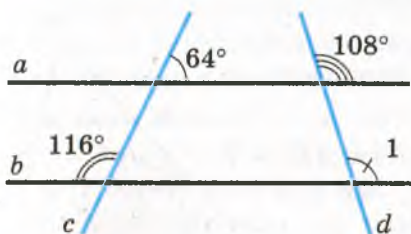


Рис. 230

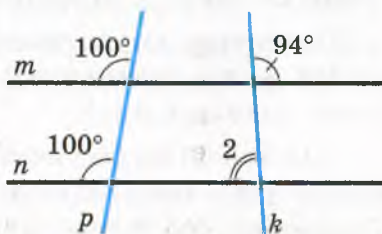


Рис. 231

- 328.°** Разность односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 50° . Найдите эти углы.
- 329.°** Один из односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.
- 330.°** Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если:

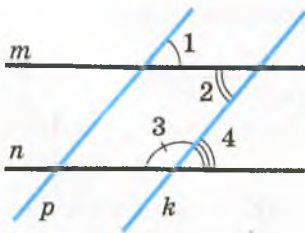


Рис. 232

- 1) один из этих углов равен 48° ;
- 2) отношение градусных мер двух из этих углов равно $2 : 7$.

331.° Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если один из них на 24° меньше другого.

332.° На рисунке 232 $m \parallel n$, $p \parallel k$, $\angle 1 = 50^\circ$. Найдите углы 2, 3 и 4.

- 333.°** Прямая, параллельная основанию AC равнобедренного треугольника ABC , пересекает его боковые стороны AB и BC в точках D и F соответственно. Докажите, что треугольник DBF равнобедренный.
- 334.°** На продолжениях сторон AC и BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) за точки A и B отметили соответственно точки P и K так, что $PK \parallel AB$. Докажите, что треугольник KPC равнобедренный.
- 335.°** Отрезки AB и CD пересекаются в точке O , $AO = BO$, $AC \parallel BD$. Докажите, что $CO = DO$.
- 336.°** Отрезки MK и DE пересекаются в точке F , $DK \parallel ME$, $DK = ME$. Докажите, что $\triangle MEF = \triangle KDF$.
- 337.°** Ответьте на вопросы.
- 1) Могут ли оба односторонних угла при двух параллельных прямых и секущей быть тупыми?
 - 2) Может ли сумма накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей быть равной 180° ?
 - 3) Могут ли быть равными односторонние углы при двух параллельных прямых и секущей?
- 338.*** На рисунке 233 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Докажите, что $BC = AD$.
- 339.*** На рисунке 233 $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.
- 340.*** На рисунке 234 $MK \parallel EF$, $ME = EF$, $\angle KMF = 70^\circ$. Найдите угол MEF .
- 341.*** Через вершину B треугольника ABC (рис. 235) провели прямую MK , параллельную прямой AC , $\angle MBA = 42^\circ$, $\angle CBK = 56^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .

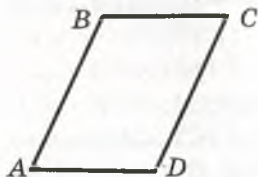


Рис. 233

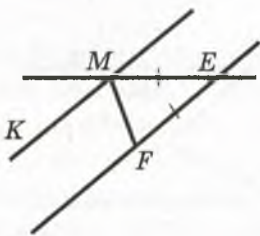


Рис. 234

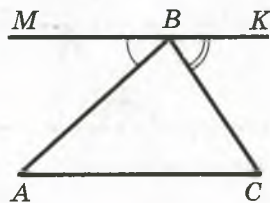


Рис. 235

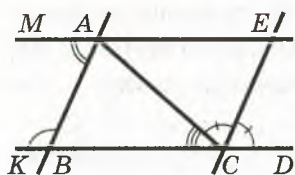


Рис. 236

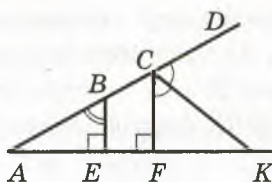


Рис. 237

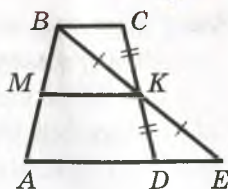


Рис. 238

- 342.*** Прямая, проведенная через вершину A треугольника ABC параллельно его противоположной стороне, образует со стороной AC угол, равный углу BAC . Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 343.*** На рисунке 236 $\angle MAB = 50^\circ$, $\angle ABK = 130^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$, CE — биссектриса угла ACD . Найдите углы треугольника ACE .
- 344.*** На рисунке 237 $BE \perp AK$, $CF \perp AK$, CK — биссектриса угла FCD , $\angle ABE = 62^\circ$. Найдите угол ACK .
- 345.*** На рисунке 238 $BC \parallel MK$, $BK = KE$, $CK = KD$. Докажите, что $AD \parallel MK$.
- 346.*** На рисунке 239 $AB = AC$, $AF = FE$, $AB \parallel EF$. Докажите, что $AE \perp BC$.
- 347.*** Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC . Через произвольную точку M его биссектрисы BD проведены прямые, параллельные его сторонам AB и BC и пересекающие отрезок AC в точках E и F соответственно. Докажите, что $DE = DF$.
- 348.**** На рисунке 240 $AB \parallel DE$. Докажите, что $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.
- 349.**** На рисунке 241 $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle CDE = 150^\circ$. Докажите, что $BC \perp CD$.

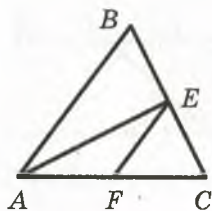


Рис. 239

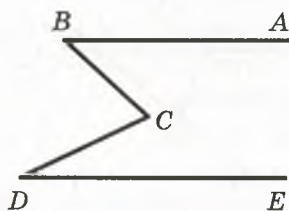


Рис. 240

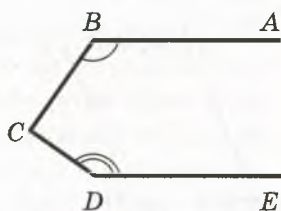


Рис. 241

- 350.** Через вершину B треугольника ABC провели прямую, параллельную его биссектрисе AM . Эта прямая пересекает прямую AC в точке K . Докажите, что треугольник BAK равнобедренный.
- 351.** Через точку O пересечения биссектрис AE и CF треугольника ABC провели прямую, параллельную прямой AC . Эта прямая пересекает сторону AB в точке M , а сторону BC — в точке K . Докажите, что $MK = AM + CK$.
- 352.** Биссектрисы углов BAC и BCA треугольника ABC пересекаются в точке O . Через эту точку проведены прямые, параллельные прямым AB и BC и пересекающие сторону AC в точках M и K соответственно. Докажите, что периметр треугольника $МОК$ равен длине стороны AC .



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

- 353.** На отрезке AB отметили точку C так, что $AC : BC = 2 : 1$. На отрезке AC отметили точку D так, что $AD : CD = 3 : 2$. В каком отношении точка D делит отрезок AB ?
- 354.** Отрезки AC и BD пересекаются в точке O , $AB = BC = CD = AD$. Докажите, что $AC \perp BD$.
- 355.** В треугольнике $МОЕ$ на стороне $МО$ отметили точку A , в треугольнике $ТРК$ на стороне $ТР$ — точку B так, что $MA = TB$. Какова градусная мера угла BKP , если $МО = TP$, $\angle M = \angle T$, $\angle O = \angle P$, $\angle AEO = 17^\circ$?



НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

- 356.** На рисунке 242 изображена очень сложная замкнутая ломаная. Она ограничивает некоторую часть плоскости (многоугольник). На рисунке отмечают произвольную точку. Как быстрее всего определить, принадлежит эта точка многоугольнику или нет?



Рис. 242



16. Сумма углов треугольника. Неравенство треугольника

Треугольник — ключевая фигура планиметрии. Мир треугольников разнообразен. Но всем им присуще свойство, которое раскрывает следующая теорема.

Теорема 16.1. *Сумма углов треугольника равна 180° .*

Доказательство. ☉ Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Требуется доказать, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Через вершину B проведем прямую a , параллельную прямой AC (рис. 243). Имеем: $\angle A$ и $\angle 1$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и AC и секущей AB . Аналогично доказываем, что $\angle C = \angle 3$. Но углы $1, 2, 3$ составляют развернутый угол с вершиной B . Следовательно, $\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. ▲

Следствие. *Среди углов треугольника не менее двух углов острые.*

Докажите это следствие самостоятельно.

Из этого следствия вытекает, что угол при основании равнобедренного треугольника всегда острый.

Определение. **Внешним углом** треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.

На рисунке 244 углы $1, 2, 3$ являются внешними углами треугольника ABC .

Теорема 16.2. *Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.*

Доказательство. ☉ На рисунке 244 углы $1, 2$ и 3 — внешние углы треугольника ABC . Надо доказать, что $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

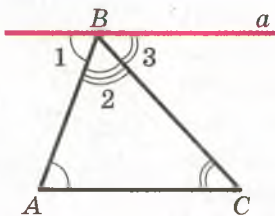


Рис. 243

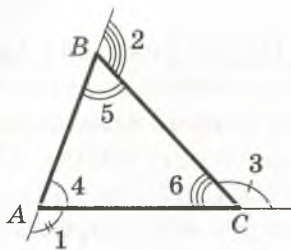


Рис. 244

Докажем, например, первое из этих трех равенств (остальные равенства доказывают аналогично).

По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$. Тогда $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, откуда $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ▲

Следствие. Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

Докажите это следствие самостоятельно.

Теорема 16.3 (неравенство треугольника). Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Доказательство. ☉ Рассмотрим треугольник ABC (рис. 245). Надо доказать, что: 1) $AB < AC + CB$; 2) $AC < AB + BC$; 3) $BC < BA + AC$.

Докажем первое из этих неравенств (два других доказывают аналогично).

Пусть доказываемое неравенство неверно. Тогда $AB > AC + CB$ или $AB = AC + CB$.

1) Пусть $AB > AC + CB$. Тогда на стороне AB можно отметить точки C_1 и C_2 такие, что $AC = AC_1$ и $BC = BC_2$ (рис. 245). Поскольку мы предположили, что $AB > AC + CB$, то $AB > AC_1 + BC_2$. Следовательно, отрезки AC_1 и BC_2 не имеют общих точек.

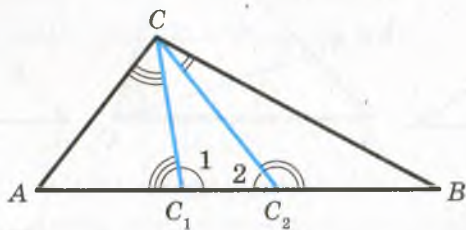


Рис. 245

Углы AC_1C и BC_2C являются острыми как углы при основании равнобедренных треугольников AC_1C и BC_2C соответственно. Тогда углы 1 и 2 являются тупыми как углы, смежные с острыми. Получили противоречие: в треугольнике C_1CC_2 два тупых угла.



2) Рассуждая аналогично, можно показать (сделайте это самостоятельно), что равенство $AB = AC + CB$ также приводит к противоречию. ▲

Из доказанной теоремы следует, что если длина одного из трех данных отрезков не меньше суммы длин двух других, то эти отрезки не могут служить сторонами треугольника (рис. 246).

Если же каждый из трех данных отрезков меньше суммы двух других, то эти отрезки могут служить сторонами треугольника.

Вы уже знаете, что в треугольнике против равных сторон лежат равные углы, и наоборот, против равных углов лежат равные стороны (пп. 9, 10). Эти свойства дополняет следующая теорема.

Теорема 16.4. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит бо́льшая сторона.*

Доказательство. ☼ 1) Рассмотрим треугольник ABC , в котором $AB > BC$. Надо доказать, что $\angle ACB > \angle A$ (рис. 247).

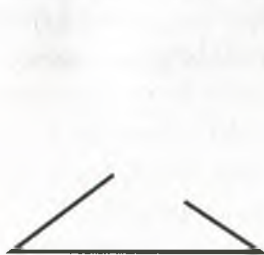


Рис. 246

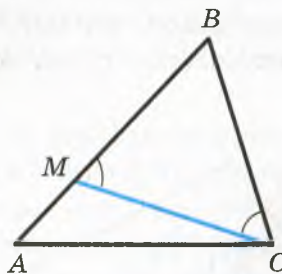


Рис. 247

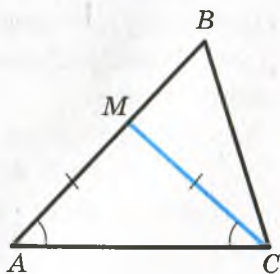


Рис. 248

Поскольку $AB > BC$, то на стороне AB найдется такая точка M , что $BM = BC$. Получили равнобедренный треугольник MBC , в котором $\angle BMC = \angle BCM$.

Так как угол BMC — внешний угол треугольника AMC , то $\angle BMC > \angle A$. Следующая «цепочка» неравенств доказывает первую часть теоремы:

$$\angle ACB > \angle MCB = \angle BMC > \angle A.$$

2) Рассмотрим треугольник ABC , в котором $\angle C > \angle A$. Надо доказать, что $AB > BC$.

Поскольку $\angle ACB > \angle A$, то угол ACB можно разделить на два угла ACM и MCB так, что $\angle ACM = \angle A$ (рис. 248). Тогда треугольник AMC равнобедренный с равными сторонами MA и MC .

Для стороны BC запишем неравенство треугольника: $MC + MB > BC$. Имеем: $AB = AM + MB = MC + MB > BC$. ▲

Заметим, что вторую часть теоремы 16.4 можно доказать методом от противного: предположить, что $BC \geq AB$, а далее воспользоваться уже доказанной первой частью теоремы. Проведите это доказательство самостоятельно.

Задача. Медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB . Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

Решение. По условию $AM = CM$ (рис. 249). Тогда в треугольнике AMC углы A и ACM равны.

По условию $BM = CM$, откуда следует, что в треугольнике BMC углы B и BCM равны.

В треугольнике ACB имеем: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$. Учитывая, что $\angle A = \angle ACM$ и $\angle B = \angle BCM$, получаем: $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180^\circ$. Поскольку $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, то $2\angle ACB = 180^\circ$. Тогда $\angle ACB = 90^\circ$.

Следовательно, треугольник ABC прямоугольный. ●

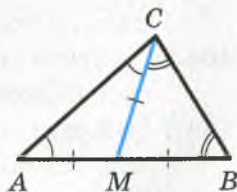


Рис. 249

1. Чему равна сумма углов треугольника?
2. Какое наименьшее количество острых углов есть в любом треугольнике?
3. Какой угол называют внешним углом треугольника?
4. Как связаны внешний угол треугольника и два угла треугольника, не смежные с ним?
5. Сравните внешний угол треугольника с углом треугольника, не смежным с ним.



6. Сформулируйте теорему о неравенстве треугольника.
7. Сформулируйте теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника.



УПРАЖНЕНИЯ

- 357.°** Найдите угол треугольника, если два других его угла равны 35° и 96° .
- 358.°** Один из углов треугольника в 3 раза меньше второго угла и на 35° меньше третьего. Найдите углы треугольника.
- 359.°** Найдите углы треугольника, если их градусные меры относятся как 2 : 3 : 7.
-  **360.°** Найдите углы равностороннего треугольника.
-  **361.°** Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.
- 362.°** Угол при основании равнобедренного треугольника равен 63° . Найдите угол при вершине этого треугольника.
- 363.°** Найдите углы при основании равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 104° .
- 364.°** Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при вершине в 4 раза больше угла при основании.
- 365.°** Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при основании на 48° меньше угла при вершине.
- 366.°** Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен: 1) 110° ; 2) 50° . Сколько решений имеет задача?
- 367.°** Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен: 1) 42° ; 2) 94° . Сколько решений имеет задача?
- 368.°** Могут ли стороны треугольника быть равными:
1) 6 см, 5 см, 12 см; 2) 6 см, 5 см, 11 см?
- 369.°** В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, AK — биссектриса, $\angle BAK = 18^\circ$. Найдите углы AKC и ABC .
- 370.°** В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, CK — биссектриса, $\angle A = 66^\circ$. Найдите угол AKC .
- 371.°** Биссектрисы AK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O , $\angle BAC = 116^\circ$, $\angle BCA = 34^\circ$. Найдите угол AOC .

372.° В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине B , равным 36° , провели биссектрису AD . Докажите, что треугольники ADB и CAD равнобедренные.

373.° В треугольнике ABC провели биссектрису BF . Найдите угол C , если $\angle A = 39^\circ$, $\angle AFB = 78^\circ$.

374.° Докажите, что если один из углов треугольника равен сумме двух других углов, то этот треугольник прямоугольный.

375.° На рисунке 250 укажите внешние углы:

- 1) при вершинах E и F треугольника MEF ;
- 2) при вершине E треугольника MKE .

376.° На рисунке 251 укажите треугольники, для которых внешним углом является: 1) угол AMB ; 2) угол BMD .

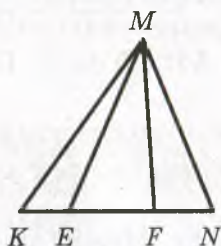


Рис. 250

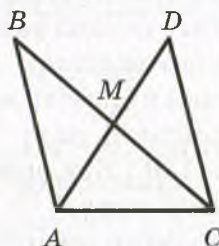


Рис. 251

377.° Один из внешних углов треугольника равен 75° . Найдите:

- 1) угол треугольника при этой вершине;
- 2) сумму двух углов треугольника, не смежных с ним.

378.° Может ли внешний угол треугольника быть меньше смежного с ним угла треугольника? В случае утвердительного ответа укажите вид треугольника.

379.° Определите вид треугольника, если один из его внешних углов равен смежному с ним углу треугольника.

380.° Один из внешних углов треугольника равен 136° , а один из углов треугольника — 61° . Найдите неизвестный угол треугольника, не смежный с данным внешним.

381.° Один из внешних углов треугольника равен 154° . Найдите углы треугольника, не смежные с ним, если один из этих углов на 28° больше другого.



- 382.°** Один из внешних углов треугольника равен 98° . Найдите углы треугольника, не смежные с ним, если один из этих углов в 6 раз меньше другого.
- 383.°** Найдите углы равнобедренного треугольника, если внешний угол при его вершине равен 38° .
- 384.°** Сравните углы треугольника ABC , если:
1) $AB > AC > BC$; 2) $AB = BC$, $BC > AC$.
- 385.°** В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 34^\circ$, $\angle B = 28^\circ$. Сравните стороны AB , BC и AC .
- 386.°** Сравните стороны треугольника ABC , если:
1) $\angle C > \angle A > \angle B$; 2) $\angle B > \angle C$, $\angle A = \angle B$.
-  **387.°** Докажите, что если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то и третьи углы этих треугольников равны.
- 388.°** Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его внешних углов равен: 1) 54° ; 2) 112° . Сколько решений имеет задача?
- 389.°** Внешний угол равнобедренного треугольника равен 130° . Найдите углы треугольника. Сколько решений имеет задача?
- 390.°** Периметр треугольника равен 30 см. Может ли одна из его сторон быть равной: 1) 20 см; 2) 15 см?
- 391.°** Длины двух сторон треугольника равны 7 см и 9 см. Может ли периметр этого треугольника быть равным: 1) 20 см; 2) 32 см; 3) 18 см?
- 392.°** Существует ли треугольник, одна из сторон которого на 2 см меньше второй и на 6 см меньше третьей, а периметр равен 20 см?
- 393.°** Биссектрисы углов при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что угол AOC равен внешнему углу треугольника ABC при вершине A .
- 394.°** На рисунке 252 $BC \parallel AD$, $\angle A = 25^\circ$, $\angle B = 55^\circ$. Найдите угол CMD .
- 395.°** Отрезок BK — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием BC , $\angle AKB = 105^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .

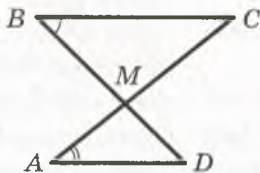


Рис. 252

396.* На стороне AB треугольника ABC отметили точку D так, что $BD = BC$, $\angle ACD = 15^\circ$, $\angle DCB = 40^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .

397.* На сторонах треугольника ABC (рис. 253) отметили точки E и F так, что $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

398.* На рисунке 254 $BC \parallel AD$, $\angle B = 100^\circ$, $\angle ACD = 95^\circ$, $\angle D = 45^\circ$. Докажите, что $AB = BC$.

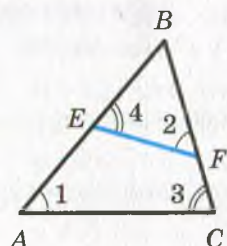


Рис. 253

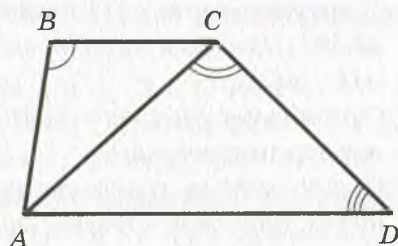


Рис. 254

399.* Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная биссектрисе AM треугольника и пересекающая прямую AB в точке K . Найдите углы треугольника AKC , если $\angle BAC = 70^\circ$.

400.* В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O . Найдите угол AOC , если $\angle B = 100^\circ$.

401.* Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию.

402.* Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна его стороне, то этот треугольник равнобедренный.

403.* Угол при основании AC равнобедренного треугольника ABC в 2 раза больше угла при вершине, AM — биссектриса треугольника. Докажите, что $BM = AC$.

404.* Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC . На стороне BC отметили точку M так, что $BM = AM = AC$. Найдите углы треугольника ABC .



405.* Докажите, что в любом треугольнике существует угол: 1) не меньше 60° ; 2) не больше 60° .



- 406.*** Определите вид треугольника, если:
- 1) один из его углов больше суммы двух других;
 - 2) любой из его углов меньше суммы двух других.
- 407.*** Определите вид треугольника, если сумма любых двух его углов больше 90° .
- 408.*** В треугольнике ABC угол B тупой. На продолжении стороны AB за точку A отметили произвольную точку D . Докажите, что $CD > AC$.
- 409.*** В треугольнике ABC известно, что $\angle C > 90^\circ$. На стороне BC отметили произвольную точку D . Докажите, что $AD > AC$.
- 410.**** Существует ли треугольник, две биссектрисы которого перпендикулярны?
- 411.**** Существует ли треугольник, в котором одна биссектриса делит пополам другую биссектрису?
- 412.**** Найдите углы треугольника ABC , если биссектриса угла B разбивает его на два равнобедренных треугольника.
-  **413.**** Три точки A , B и C таковы, что выполняется равенство $AB = AC + CB$. Докажите, что точка C является внутренней точкой отрезка AB .
- 414.**** На прямой m (рис. 255) найдите такую точку C , чтобы сумма расстояний от нее до точек A и B была наименьшей. Ответ обоснуйте.
- 415.*** Одна сторона треугольника равна 2,8 см, а вторая — 0,6 см. Найдите третью сторону этого треугольника, если ее длина, выраженная в сантиметрах, равна целому числу.
- 416.*** В треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha$, биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в точке O . Найдите угол BOC .
- 417.*** Отрезок AM — медиана треугольника ABC , $\angle CAM > \angle BAM$. Докажите, что $AB > AC$.



Рис. 255

- 418.*** На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки E и F так, что $AC = AF = EF = BE$. Найдите углы треугольника ABC .

- 419.* В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. На стороне AC отметили точку D так, что $AD = 1$ см. Найдите углы треугольника BDC .
- 420.* Докажите, что сумма длин двух сторон треугольника больше удвоенной длины медианы, проведенной к третьей стороне.



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

421. На прямой отметили точки A , B и C так, что точка B лежит между точками A и C , причем $BC = 2AB$. На отрезке BC отметили точку D так, что $BD : DC = 3 : 7$. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD , если отрезок CD на 16 см длиннее отрезка BD .
422. На медиане BM треугольника ABC отметили точку O так, что $\angle OAC = \angle OCA$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.



НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

423. Существует ли шестиугольник, у которого никакие две диагонали не имеют общих точек, отличных от вершин?

17. Прямоугольный треугольник

На рисунке 256 изображен прямоугольный треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$.

Сторону прямоугольного треугольника, противоположную прямому углу, называют **гипотенузой**, а стороны, прилежащие к прямому углу, — **катетами** (рис. 256).

Для доказательства равенства двух треугольников находят их равные элементы.

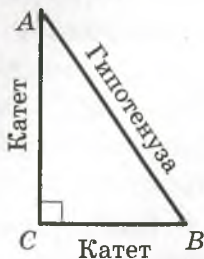


Рис. 256



У любых двух прямоугольных треугольников такие элементы есть всегда — это прямые углы. Поэтому для прямоугольных треугольников можно сформулировать «персональные» признаки равенства.

Теорема 17.1 (признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету). Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Доказательство. ★ Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 257). Надо доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

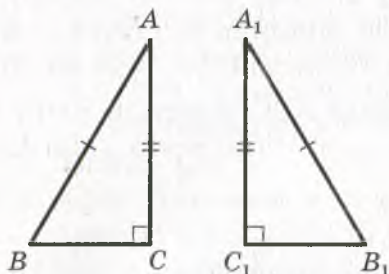


Рис. 257

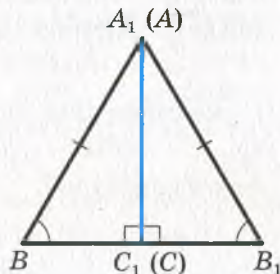


Рис. 258

Расположим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совпала с вершиной A_1 , вершина C — с вершиной C_1 , а точки B и B_1 лежали в разных полуплоскостях относительно прямой A_1C_1 (рис. 258).

Имеем: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Значит, угол BC_1B_1 развернутый, поэтому точки B, C_1, B_1 лежат на одной прямой. Получили равнобедренный треугольник BA_1B_1 с боковыми сторонами A_1B и A_1B_1 и высотой A_1C_1 (рис. 258). Тогда A_1C_1 — медиана этого треугольника, то есть $C_1B = C_1B_1$. Следовательно, треугольники A_1BC_1 и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. ▲

При решении задач удобно пользоваться и другими признаками равенства прямоугольных треугольников, непосредственно следующими из признаков равенства треугольников.

Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Очевидно, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то равны и два других острых угла. Воспользовавшись этим утверждением, список признаков равенства прямоугольных треугольников можно дополнить еще двумя.

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу. Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Задача. Докажите равенство прямоугольных треугольников по острому углу и биссектрисе, проведенной из вершины этого угла.

Решение. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 259) $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы, $AD = A_1D_1$.

Имеем: $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1$. Поскольку $AD = A_1D_1$, то прямоугольные треугольники ACD и $A_1C_1D_1$

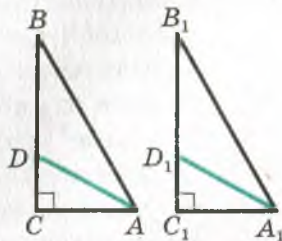


Рис. 259



равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $AC = A_1C_1$, и так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по катету и прилежащему острому углу. ●



1. Какой треугольник называют прямоугольным?
2. Какую сторону прямоугольного треугольника называют гипотенузой?
3. Какую сторону прямоугольного треугольника называют катетом?
4. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.
5. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам.
6. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу.
7. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу.
8. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.
9. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

424.° С помощью транспортира и линейки постройте прямоугольный треугольник:

- 1) катеты которого равны 3 см и 4 см;
- 2) один из катетов которого равен 2,5 см, а прилежащий к нему угол — 40° ;
- 3) гипотенуза которого равна 6 см, а один из острых углов равен 70° .

Обозначьте построенные треугольники, укажите в каждом из них катеты и гипотенузу.

425.° С помощью транспортира и линейки постройте равнобедренный прямоугольный треугольник:

- 1) с катетом, равным 5 см;
- 2) с гипотенузой, равной 4 см.



УПРАЖНЕНИЯ

426.° На рисунке 260 изображен треугольник MKE с прямым углом при вершине K . Укажите:

- 1) катеты и гипотенузу треугольника;
- 2) катет, прилежащий к углу E ;
- 3) катет, противолежащий углу M .

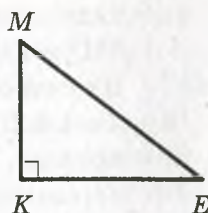


Рис. 260

427.° На рисунке 261 AD — высота треугольника ABC . Найдите на этом рисунке прямоугольные треугольники, укажите в каждом из них катеты и гипотенузу.

428.° Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 43° . Найдите другой острый угол.

429.° В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота AH . Найдите угол CAH , если $\angle B = 76^\circ$.

430.° Угол между основанием равнобедренного треугольника и высотой, проведенной к боковой стороне, равен 19° . Найдите углы данного треугольника.

431.° На рисунке 262 $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $AC = BD$. Докажите, что $AB = CD$.

432.° На рисунке 263 $MO = FO$, $\angle MEO = \angle FKO = 90^\circ$. Докажите, что $\triangle MEO = \triangle FKO$.

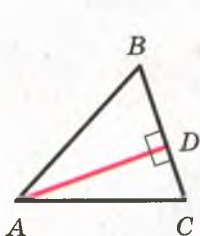


Рис. 261

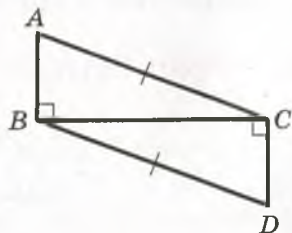


Рис. 262

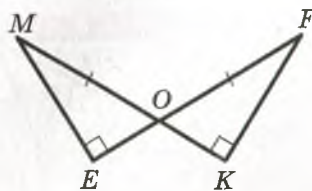


Рис. 263



- 433.°** Из точек A и B , лежащих в одной полуплоскости относительно прямой a , опущены перпендикуляры AM и BK на эту прямую, $AM = BK$. Докажите, что $AK = BM$.
- 434.°** На рисунке 264 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $BM \perp AC$, $DK \perp AC$. Докажите, что $BM = DK$.
- 435.°** На рисунке 265 $AB = BC$, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$. Докажите, что $BE = BD$.
- 436.°** На биссектрисе угла с вершиной в точке B отметили точку M , из которой опустили перпендикуляры MD и MC на стороны угла. Докажите, что $MD = MC$.
- 437.°** На сторонах угла с вершиной в точке B отметили точки A и C так, что $AB = BC$. Через точки A и C провели прямые, перпендикулярные сторонам BA и BC соответственно, которые пересекаются в точке O . Докажите, что луч BO — биссектриса угла ABC .
- 438.°** Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные к его боковым сторонам, равны.
- 439.°** Докажите, что если две высоты треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.
- 440.°** Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и биссектрисе, проведенной из вершины прямого угла.
- 441.°** Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и высоте, проведенной из вершины прямого угла.
- 442.°** Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и биссектрисе, проведенной из вершины прилежащего к этому катету острого угла.
- 443.°** Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и медиане, проведенной к другому катету.

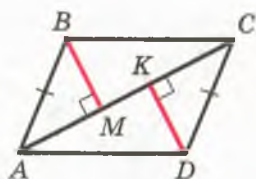


Рис. 264

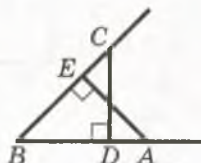


Рис. 265

-  444.* Докажите, что в равных треугольниках высоты, опущенные на соответственные стороны, равны.
- 445.* Докажите равенство остроугольных треугольников по стороне и двум высотам, проведенным из концов этой стороны.
- 446.* Докажите равенство треугольников по стороне и проведенным к ней медиане и высоте.
- 447.* Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC соответственно в точках M и K , являющихся серединами этих сторон. Докажите, что вершины данного треугольника равноудалены от прямой MK .
- 448.* Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и K соответственно. Вершины данного треугольника равноудалены от прямой MK . Докажите, что точки M и K являются серединами сторон AB и BC соответственно.
- 449.* Высоты AM и CK треугольника ABC пересекаются в точке H , $HK = HM$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 450.* Высоты ME и NF треугольника MKN пересекаются в точке O , $OM = ON$, $MF = KE$. Докажите, что треугольник MKN равносторонний.
- 451.* Можно ли утверждать, что если две стороны и высота, проведенная к третьей стороне, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне, другого треугольника, то эти треугольники равны?
- 452.* Докажите равенство треугольников по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

453. Углы ABC и DBC смежные, луч BM принадлежит углу ABC , луч BK — углу DBC , $\angle MBC = \angle CBK = 30^\circ$, угол DBK в 5 раз больше угла ABM . Найдите углы ABC и DBC .



454. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки M и K так, что $BM = BK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O . Докажите, что: 1) треугольник AOC равнобедренный; 2) прямая BO — серединный перпендикуляр отрезка AC .

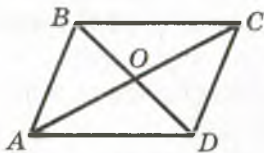


Рис. 266

455. На рисунке 266 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $AO = OC$.



**НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ**

456. Можно ли замостить плоскость фигурами, каждая из которых равна фигуре, изображенной на рисунке 267?



Рис. 267

18. Свойства прямоугольного треугольника

Теорема 18.1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

Доказательство. ☉ Каждый из катетов лежит против острого угла, а гипотенуза лежит против прямого угла. Прямой угол больше острого угла, а в треугольнике против большего угла лежит большая сторона (теорема 16.4). Поэтому гипотенуза больше любого из катетов. ▲

Следствие. Если из одной точки, не лежащей на прямой, к этой прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр меньше наклонной.

На рисунке 268 отрезок AB — перпендикуляр, отрезок AX — наклонная, $AB < AX$.

🔑 **Задача 1.** Докажите, что катет, лежащий против угла, величина которого равна 30° , равен половине гипотенузы.

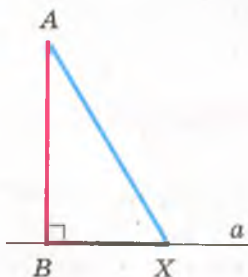


Рис. 268

Решение. Рассмотрим треугольник ABC , в котором $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$. Надо доказать, что $BC = \frac{1}{2} AB$.

На луче BC отложим отрезок CD , равный отрезку BC (рис. 269). Проведем отрезок AD . Тогда в треугольниках ABC и ADC имеем: $\angle ACB = \angle ACD = 90^\circ$, стороны BC и CD равны по построению, AC — общая сторона этих треугольников. Следовательно, эти треугольники равны по двум катетам. Тогда $\angle DAC = 30^\circ$, отсюда $\angle BAD = 2 \angle DAC = 60^\circ$. Имеем: $\angle ABD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Тогда $\angle ADB = 60^\circ$ и треугольник ABD равносторонний. Значит, $BC = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AB$. ●

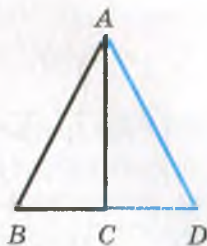


Рис. 269

Задача 2. Докажите, что если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° .

Решение. Рассмотрим треугольник ABC , в котором $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = \frac{1}{2} AB$. Надо доказать, что $\angle BAC = 30^\circ$.

На луче BC отложим отрезок CD , равный отрезку BC (рис. 269). Тогда $AB = BD$. Кроме того, отрезок AC является медианой и высотой треугольника BAD , следовательно, по признаку равнобедренного треугольника $AB = AD$. Получаем: $AB = BD = AD$, поэтому треугольник BAD равносторонний, следовательно, $\angle BAD = 60^\circ$.

Поскольку отрезок AC — биссектриса треугольника BAD , то $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 30^\circ$. ●

1. Какая из сторон прямоугольного треугольника является наибольшей?
2. Каково свойство катета, лежащего против угла, равного 30° ?
3. Какова градусная мера угла, лежащего против катета, равного половине гипотенузы?



УПРАЖНЕНИЯ

- 457.° Стороны прямоугольного треугольника равны 24 см, 10 см и 26 см. Чему равен наибольший катет данного треугольника?
- 458.° В прямоугольном треугольнике DEF гипотенуза DE равна 18 см, $\angle D = 30^\circ$. Найдите катет FE .
- 459.° В прямоугольном треугольнике MKC известно, что $\angle M = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $CM = 7$ см. Найдите гипотенузу CK .
- 460.° В равностороннем треугольнике ABC точка D — середина стороны AB . Из этой точки опущен перпендикуляр DE на сторону AC . Найдите отрезки, на которые точка E разбивает отрезок AC , если сторона данного треугольника равна 16 см.
- 461.° Один из углов прямоугольного треугольника равен 30° , а разность гипотенузы и меньшего катета равна 5 см. Найдите эти стороны треугольника.
- 462.° В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, CK — высота, $AC = 10$ см. Найдите отрезок BK .
- 463.° В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, CD — высота, $BD = 7$ см. Найдите гипотенузу AB .
- 464.° В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, CK — высота, $CK = 7$ см, $AC = 14$ см. Найдите угол B .
- 465.° На рисунке 270 AB — перпендикуляр, AC — наклонная, $AC = 2$ см. Найдите угол ACB и длину перпендикуляра AB , если эта длина, выраженная в сантиметрах, равна целому числу.
- 466.° Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а один из углов равен 120° . Найдите высоту треугольника, проведенную из вершины угла при его основании.

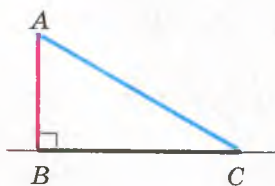


Рис. 270

- 467.° В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC провели высоту BM длиной 7,5 см, $\angle MBC = 15^\circ$. Найдите боковую сторону треугольника.

- 468.* Биссектрисы AM и BK равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что $AO : OM = 2 : 1$.
- 469.** В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Серединный перпендикуляр отрезка AB пересекает его в точке M , а отрезок BC — в точке K . Докажите, что $MK = \frac{1}{3} BC$.
- 470.** В треугольнике MKE известно, что $\angle K = 90^\circ$, $\angle E = 30^\circ$, $KE = 12$ см. Найдите биссектрису MC треугольника.
- 471.** В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, отрезок AD — биссектриса, отрезок CD на 3 см меньше отрезка BD . Найдите биссектрису AD .



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

472. На рисунке 271 $AB = BC$, $AM = KC$, $\angle AKE = \angle FMC$. Докажите, что треугольник FBE равнобедренный.
473. Через вершины A и B треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ACB и пересекающие прямые BC и AC в точках M и K соответственно. Найдите периметр треугольника ABC , если $AC > BC$, $CM = 6$ см, $BK = 2$ см, $AB = 7$ см.
474. На рисунке 272 $BC \parallel AD$, луч CA — биссектриса угла BCD , $AD = 9$ см, $AC = 8$ см. Найдите периметр треугольника CAD .

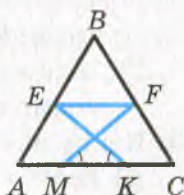


Рис. 271

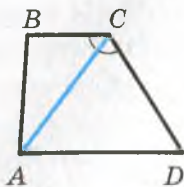


Рис. 272



НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

475. Разрежьте треугольник на четыре части так, чтобы, перевернув три из них, можно было бы снова сложить треугольник, равный данному.



ЗАДАНИЕ № 3 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

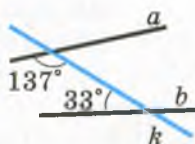
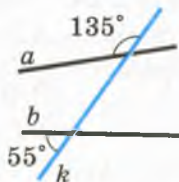
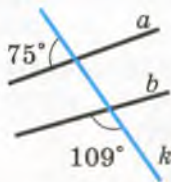
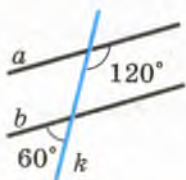
1. Какое из следующих утверждений верно?
 - А) Если два отрезка не имеют общих точек, то они параллельны.
 - Б) Если два луча не имеют общих точек, то они параллельны.
 - В) Если луч и отрезок не имеют общих точек, то они параллельны.
 - Г) Если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны.
2. Какое из следующих утверждений верно?
 - А) Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только один отрезок, параллельный этой прямой.
 - Б) Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только один луч, параллельный этой прямой.
 - В) Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит бесконечно много прямых, не параллельных этой прямой.
 - Г) Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходят только две прямые, параллельные этой прямой.
3. Какое из следующих утверждений неверно?
 - А) Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.
 - Б) Если $a \perp b$ и $b \perp c$, то $a \parallel c$.
 - В) Если $a \perp b$ и $b \perp c$, то $a \perp c$.
 - Г) Если $a \parallel b$ и $c \perp b$, то $c \perp a$.
4. На каком из рисунков прямые a и b параллельны?

А)

Б)

В)

Г)



5. Какое из следующих утверждений неверно?
 - А) Если сумма углов одной пары накрест лежащих углов равна сумме углов другой пары, то прямые не параллельны.

- Б) Если накрест лежащие углы не равны, то прямые не параллельны.
- В) Если сумма односторонних углов не равна 180° , то прямые не параллельны.
- Г) Если соответственные углы не равны, то прямые не параллельны.
6. Сколько внешних углов у треугольника?
А) 3; Б) 6; В) 4; Г) 9.
7. Чему равна сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине?
А) 180° ; Б) 300° ; В) 360° ; Г) 100° .
8. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O . Какое из следующих равенств верно?
А) $\angle AOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B$; В) $\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle B$;
Б) $\angle AOC = 90^\circ - \angle B$; Г) $\angle AOC = 90^\circ + \angle B$.
9. В треугольнике ABC высоты, проведенные из вершин A и C , пересекаются в точке O . Какое из следующих равенств верно?
А) $\angle AOC = 90^\circ - \angle B$; В) $\angle AOC = 90^\circ + \angle B$;
Б) $\angle AOC = 180^\circ - \angle B$; Г) $\angle AOC = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle B$.
10. Какое из следующих утверждений верно?
А) Если две стороны одного прямоугольного треугольника равны двум сторонам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
Б) Если катет и острый угол одного прямоугольного треугольника равны катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
В) Если гипотенуза и два угла одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и двум углам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
Г) Если сторона и два угла одного прямоугольного треугольника равны стороне и двум углам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



11. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Какое из следующих утверждений неверно?

А) $CB = \frac{1}{2}AB$;

В) $CB = \frac{1}{2}AC$;

Б) $AC = \frac{1}{2}AB$;

Г) $AC = \frac{1}{2}CB$.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 3

Параллельные прямые

Две прямые называют параллельными, если они не пересекаются.

Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельности прямых)

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Признаки параллельности двух прямых

- Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.
- Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
- Если накрест лежащие углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.
- Если сумма односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180° , то прямые параллельны.
- Если соответственные углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

Свойства параллельных прямых

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то:

- углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны;
- углы, образующие пару соответственных углов, равны;
- сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180° .

Расстояние между параллельными прямыми

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной из прямых до другой прямой.

Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180° .

Внешний угол треугольника

Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Сравнение сторон и углов треугольника

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

Гипотенуза и катет

Сторону прямоугольного треугольника, противоположную прямому углу, называют гипотенузой, а стороны, прилежащие к прямому углу, — катетами.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

- *По гипотенузе и катету*: если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.
- *По двум катетам*: если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.
- *По катету и прилежащему острому углу*: если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.



- *По катету и противолежащему острому углу:* если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.
- *По гипотенузе и острому углу:* если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Свойства прямоугольного треугольника

- Гипотенуза больше катета.
- Катет, лежащий против угла, величина которого равна 30° , равен половине гипотенузы.
- Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° .

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

§4

В этом параграфе вы познакомитесь со свойствами окружности, с понятием геометрического места точек. Узнаете, что в любой треугольник можно вписать окружность и около любого треугольника можно описать окружность.





19. Геометрическое место точек. Окружность и круг

Любое множество точек — это геометрическая фигура. Изобразить произвольную фигуру легко: все, что нарисуете, — это геометрическая фигура (рис. 273). Однако изучать фигуры, состоящие из хаотически расположенных точек, вряд ли целесообразно. Поэтому есть смысл выделить тот класс фигур, все точки которых обладают каким-то характерным свойством. Каждую из таких фигур называют **геометрическим местом точек**.



Рис. 273

Определение. Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество всех точек, обладающих определенным свойством.

Образно ГМТ можно представить так: задают некоторое свойство, а потом на белой плоскости *все точки*, обладающие этим свойством, красят в красный цвет. Полученная при этом «красная фигура» и будет ГМТ.

Например, отметим две точки A и B . Для всех точек зададим свойство: одновременно принадлежать лучам AB и BA .



Ясно, что указанным свойством обладают все точки отрезка AB и только они (рис. 274). Поэтому отрезок AB является ГМТ, обладающих указанным свойством.

Рассмотрим перпендикулярные прямые a и b . Для всех точек зададим свойство: принадлежать прямой b и находиться на расстоянии 1 см от прямой a . Очевидно, что точки A и B (рис. 275) удовлетворяют этим условиям. Также понятно, что никакая другая точка, отличная от A и B , этим свойством не обладает. Следовательно, искомое ГМТ — это фигура, состоящая из двух точек A и B (рис. 275).



Рис. 274

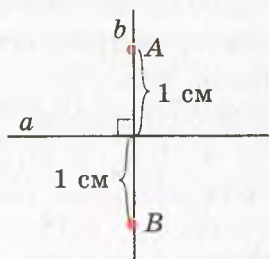


Рис. 275

Чтобы какое-то множество точек можно было называть геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, надо доказать две взаимно обратные теоремы:

1) **прямая теорема:** каждая точка данного множества обладает заданным свойством;

2) **обратная теорема:** если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит данному множеству.

Теорема 19.1. *Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов этого отрезка.*

Прямая теорема. *Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от его концов.*

Доказательство. ☉ По теореме 8.2 каждая точка серединного перпендикуляра обладает заданным свойством.

Обратная теорема. *Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка.*



Доказательство. ☉ По теореме 11.2, если точка обладает этим свойством, то она принадлежит серединному перпендикуляру. ▲

Теорема 19.2. *Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудаленных от его сторон.*

Прямая теорема. *Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.*

Доказательство. ☉ Очевидно, что вершина угла обладает доказываемым свойством.

Рассмотрим произвольную точку X , которая не совпадает с вершиной угла ABC и принадлежит его биссектрисе. Опустим перпендикуляры XM и XN соответственно на стороны BA и BC (рис. 276). Докажем, что $XM = XN$.

В прямоугольных треугольниках BXM и BXN гипотенуза BX — общая, $\angle MBX = \angle NBX$, так как BX — биссектриса угла ABC . Следовательно, треугольники BXM и BXN равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $XM = XN$. ▲

Обратная теорема. *Если точка, принадлежащая углу, равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе этого угла.*

Доказательство. ☉ Очевидно, что вершина угла обладает доказываемым свойством.

Рассмотрим произвольную точку X , принадлежащую углу ABC , которая не совпадает с его вершиной и равноудалена от его сторон (рис. 276). Опустим перпендикуляры XM и XN соответственно на стороны BA и BC . Надо доказать, что $\angle MBX = \angle NBX$.

В прямоугольных треугольниках BXM и BXN гипотенуза BX — общая, отрезки XM и XN равны по условию. Следовательно, треугольники BXM и BXN равны по гипотенузе и катету. Отсюда $\angle MBX = \angle NBX$. ▲

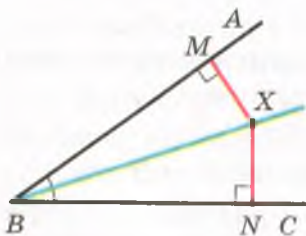


Рис. 276

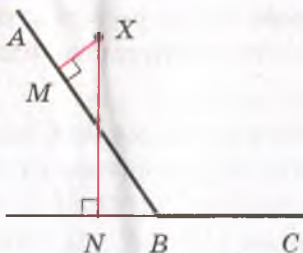


Рис. 277

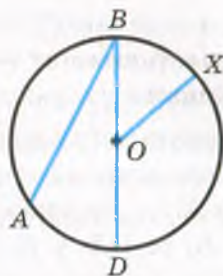


Рис. 278

Заметим, что доказательство теоремы будет полным, если показать, что равноудаленность точки угла от его сторон исключает возможность, когда одна из точек M или N принадлежит продолжению стороны угла (рис. 277). Исследовать эту ситуацию вы можете на занятии математического кружка.

Также отметим, что доказанная теорема справедлива и для развернутого угла.

Определение. Окружностью называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки равны данному положительному числу.

Заданную точку называют **центром** окружности. На рисунке 278 точка O — центр окружности.

Любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, называют **радиусом** окружности. Длину этого отрезка также принято называть радиусом. На рисунке 278 отрезок OX — радиус. Из определения следует, что все радиусы одной окружности равны.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют **хордой** окружности. На рисунке 278 отрезки AB и BD — хорды. Хорду, проходящую через центр окружности, называют **диаметром**. На рисунке 278 отрезок BD — диаметр окружности. Очевидно, что $BD = 2OX$, то есть диаметр окружности в два раза больше ее радиуса.

Из курса математики 6 класса вы знаете, что фигуру, ограниченную окружностью, называют **кругом** (рис. 279). Теперь определение круга можно сформулировать с помощью понятия ГМТ.



Определение. Кругом называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки не больше данного положительного числа.

Заданную точку называют **центром круга**. Радиус окружности, ограничивающей круг, называют **радиусом круга**.

Если X — произвольная точка круга с центром O и радиусом R , то $OX \leq R$ (рис. 279). Если $OX < R$, то говорят, что точка X лежит внутри окружности, ограничивающей данный круг. Точка Y кругу не принадлежит (рис. 279). В этом случае говорят, что точка Y лежит вне окружности, ограничивающей круг.

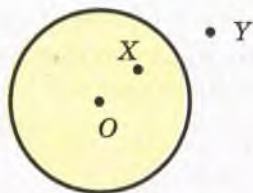


Рис. 279

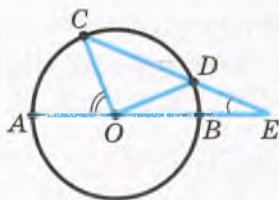


Рис. 280

Из определения круга следует, что окружность, ограничивающая круг, ему принадлежит.

Хорда и диаметр круга — это хорда и диаметр окружности, ограничивающей круг.

Задача. На продолжении хорды CD окружности с центром O за точку D отметили точку E такую, что отрезок DE равен радиусу окружности. Прямая OE пересекает данную окружность в точках A и B (рис. 280). Докажите, что $\angle AOC = 3\angle CEO$.

Решение. Пусть $\angle CEO = \alpha$.

Поскольку треугольник ODE равнобедренный, то $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$.

Угол ODC — внешний угол треугольника ODE . Тогда $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Так как треугольник COD равнобедренный, то $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.

Угол AOC — внешний угол треугольника COE . Тогда $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, то есть $\angle AOC = 3\angle CEO$. ●



1. Какое множество точек называют геометрическим местом точек?
2. Какие две теоремы надо доказать, чтобы некоторое множество точек можно было назвать ГМТ, обладающих некоторым свойством?
3. Какая фигура является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка?
4. Какая фигура является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудаленных от его сторон?
5. Что называют окружностью?
6. Что называют радиусом окружности?
7. Что называют хордой окружности?
8. Что называют диаметром окружности?
9. Как связаны между собой диаметр и радиус окружности?
10. Что называют кругом?
11. Принадлежит ли окружности ее центр?
12. Принадлежит ли кругу его центр?
13. Какое неравенство выполняется для любой точки A , принадлежащей кругу с центром O и радиусом R ?
14. Какое неравенство выполняется для любой точки B , не принадлежащей кругу с центром O и радиусом R ?

**ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ**

- 476.° Начертите окружность с центром O и радиусом 3,5 см. Отметьте на этом рисунке какие-нибудь:
- 1) точки A и B такие, что $OA < 3,5$ см, $OB < 3,5$ см;
 - 2) точки C и D такие, что $OC = 3,5$ см, $OD = 3,5$ см;
 - 3) точки E и F такие, что $OE > 3,5$ см, $OF > 3,5$ см.
- 477.° Начертите отрезок AB , длина которого равна 3 см. Найдите точку, удаленную от каждого из концов отрезка AB на 2 см. Сколько существует таких точек?
- 478.° Начертите отрезок CD , длина которого равна 4 см. Найдите точку, удаленную от точки C на 2,5 см, а от точки D — на 3,5 см. Сколько существует таких точек?



- 479.*** Начертите окружность, диаметр которой равен 7 см. Отметьте на окружности точку A . Найдите на окружности точки, удаленные от точки A на 4 см.



УПРАЖНЕНИЯ

- 480.°** На рисунке 281 изображена окружность с центром B . Укажите радиус, хорду и диаметр окружности. Сколько изображено на рисунке радиусов? хорд?

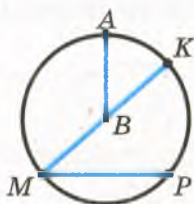


Рис. 281

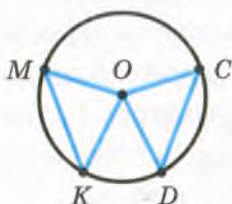


Рис. 282

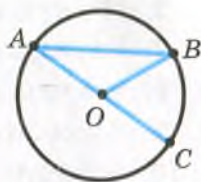


Рис. 283

- 481.°** Хорды AB и CD окружности с центром O равны. Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.
- 482.°** На рисунке 282 точка O — центр окружности, $\angle COD = \angle MOK$. Докажите, что хорды CD и MK равны.
- 483.°** Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что $\angle BAC = \angle CDB$.
- 484.°** Отрезки MK и EF — диаметры окружности с центром O , $MK = 12$ см, $ME = 10$ см. Найдите периметр треугольника FOK .
- 485.°** Отрезки AC и AB — соответственно диаметр и хорда окружности с центром O , $\angle BAC = 26^\circ$ (рис. 283). Найдите угол BOC .
- 486.°** Отрезки MP и MK — соответственно хорда и диаметр окружности с центром O , $\angle POK = 84^\circ$ (рис. 284). Найдите угол MPO .
- 487.°** Отрезки AB и AC — соответственно диаметр и хорда окружности, хорда AC равна радиусу этой окружности. Найдите угол BAC .

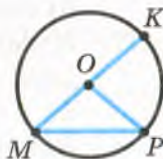
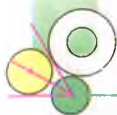


Рис. 284



- 488.° Отрезок CD — диаметр окружности с центром O . На окружности отметили точку E так, что $\angle COE = 90^\circ$. Докажите, что $CE = DE$.
- 489.° Чему равен диаметр окружности, если известно, что он на 4 см больше радиуса данной окружности?
- 490.° Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что $AC \parallel BD$.
- 491.* Хорда пересекает диаметр окружности под углом 30° и делит его на отрезки длиной 4 см и 10 см. Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.
- 492.* Хорда CD пересекает диаметр AB в точке M , $CE \perp AB$, $DF \perp AB$, $\angle AMC = 60^\circ$, $ME = 18$ см, $MF = 12$ см (рис. 285). Найдите хорду CD .
- 493.** Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, проходящих через данную точку.
- 494.** Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.
- 495.** Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.
- 496.** Найдите геометрическое место вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание.
- 497.** Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух параллельных прямых.
- 498.** Найдите геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на заданное расстояние.
- 🔑 499.** Отрезок AB — диаметр окружности, M — произвольная точка окружности, отличная от точек A и B . Докажите, что $\angle AMB = 90^\circ$.
- 500.* Даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек X таких, что $AX > BX$.
- 501.* Даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек X таких, что $AX > AB$.

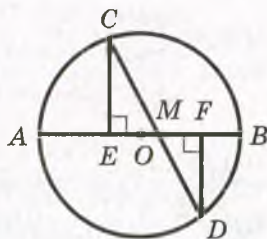


Рис. 285



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

502. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектрисы AD и CE . Докажите, что $AE = AD$.
503. Из точки O через точки A , B и C проведены лучи OA , OB и OC . Известно, что $OA = OB = OC$, $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle BOC = 110^\circ$, $\angle AOC = 170^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .
504. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $BM = CM$, луч MK — биссектриса угла AMC . Докажите, что $MK \parallel BC$.
505. В остроугольном треугольнике один из внешних углов равен 160° . Найдите угол между прямыми, на которых лежат высоты, проведенные из двух других вершин треугольника.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

506. На рисунке 286 прямоугольник $ABCD$ составлен из квадратов. Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна 1.

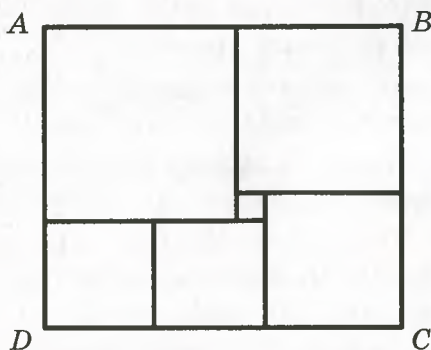


Рис. 286



20. Свойства окружности. Касательная к окружности

Теорема 20.1. *Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.*

Доказательство. ☉ Если хорда является диаметром, то заключение теоремы очевидно.

На рисунке 287 изображена окружность с центром O , M — точка пересечения диаметра CD и хорды AB , отличной от диаметра окружности, $CD \perp AB$. Докажем, что $AM = MB$.

Проведем радиусы OA и OB . В равнобедренном треугольнике AOB ($OA = OB$) отрезок OM — высота, а значит, и медиана, то есть $AM = MB$. ▲

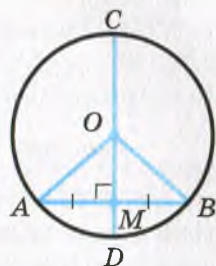


Рис. 287

Теорема 20.2. *Диаметр окружности, делящий хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде.*

Докажите эту теорему самостоятельно. Подумайте, будет ли верным это утверждение, если хорда является диаметром окружности.

На рисунке 288 показаны все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности: они не имеют общих точек (рис. 288, а), имеют две общие точки (рис. 288, б), имеют одну общую точку (рис. 288, в).

Определение. Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют **касательной** к окружности.

На рисунке 288, в прямая a — касательная к окружности с центром в точке O , A — точка касания.



Рис. 288

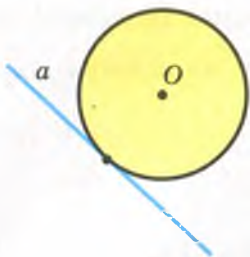
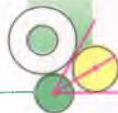


Рис. 289

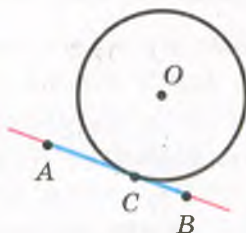


Рис. 290

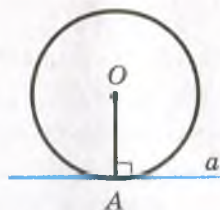


Рис. 291

Касательная к окружности имеет только одну общую точку с кругом, ограниченным этой окружностью. Также говорят, что эта прямая является **касательной к кругу**, ограниченному данной окружностью. Так, на рисунке 289 прямая a — касательная к кругу с центром в точке O .

Если отрезок (луч) принадлежит касательной к окружности и имеет с этой окружностью общую точку, то говорят, что отрезок (луч) *касается* окружности. Например, на рисунке 290 изображен отрезок AB , который касается окружности в точке C .

Теорема 20.3 (свойство касательной). *Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.*

Доказательство. ☉ На рисунке 291 изображена окружность с центром O , A — точка касания прямой a и окружности. Надо доказать, что $OA \perp a$.

Предположим, что это не так, то есть отрезок OA — наклонная к прямой a . Тогда из точки O опустим перпендикуляр OM на прямую a (рис. 292). Поскольку точка A — единственная общая точка прямой a и круга с центром O , ограниченного этой окружностью, то точка M не принадлежит этому кругу. Отсюда $OM = MB + OB$, где B — точка пересечения окружности и перпендикуляра OM . Отрезки OA и OB равны как радиусы окружности. Таким образом, $OM > OA$. Получили противоречие: перпендикуляр OM больше наклонной OA . Следовательно, $OA \perp a$. ▲

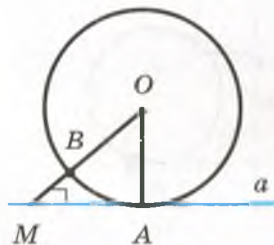


Рис. 292



Теорема 20.4 (признак касательной к окружности). Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Доказательство. На рисунке 291 изображена окружность с центром в точке O , отрезок OA — ее радиус, точка A принадлежит прямой a , $OA \perp a$. Докажем, что прямая a — касательная к окружности.

Пусть прямая a не является касательной, а имеет еще одну общую точку B с окружностью (рис. 293). Тогда отрезки OA и OB равны как радиусы, следовательно, треугольник AOB равнобедренный. Отсюда $\angle OBA = \angle OAB = 90^\circ$. Получаем противоречие: в треугольнике AOB есть два прямых угла. Следовательно, прямая a является касательной к окружности. $\blacktriangle$

Следствие. Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Докажите это следствие самостоятельно.

Задача. Докажите, что если через данную точку к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных, соединяющих данную точку с точками касания, равны.

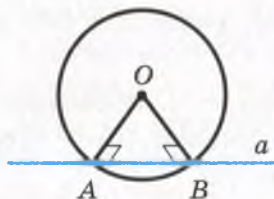


Рис. 293

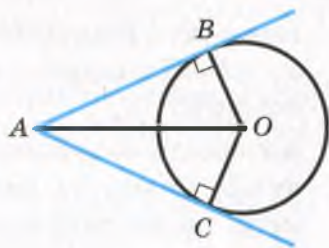


Рис. 294

Решение. На рисунке 294 изображена окружность с центром O . Прямые AB и AC — касательные, B и C — точки касания. Надо доказать, что $AB = AC$.

Проведем радиусы OB и OC в точки касания. По свойству касательной (теорема 20.3) $OB \perp AB$ и $OC \perp AC$. В прямоугольных треугольниках AOB и AOC катеты OB и OC равны



как радиусы одной окружности, AO — общая гипотенуза. Следовательно, треугольники AOB и AOC равны по гипотенузе и катету. Отсюда $AB = AC$. ●

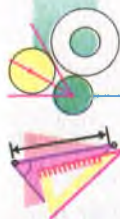


1. Как делит хорду перпендикулярный ей диаметр?
2. Чему равен угол между хордой, отличной от диаметра, и диаметром, делящим эту хорду пополам?
3. Опишите все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности.
4. Какую прямую называют касательной к окружности?
5. Каким свойством обладает радиус, проведенный в точку касания прямой и окружности?
6. Сформулируйте признак касательной к окружности.
7. Каким свойством обладают касательные, проведенные к окружности через одну точку?



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

- 507.° Начертите окружность с центром O , проведите хорду AB . Пользуясь угольником, разделите эту хорду пополам.
- 508.° Начертите окружность с центром O , проведите хорду CD . Пользуясь линейкой со шкалой, проведите диаметр, перпендикулярный хорде CD .
- 509.° Начертите окружность, отметьте на ней точки A и B . Пользуясь линейкой и угольником, проведите прямые, которые касаются окружности в точках A и B .
- 510.° Проведите прямую a и отметьте на ней точку M . Пользуясь угольником, линейкой и циркулем, постройте окружность радиуса 3 см, которая касается прямой a в точке M . Сколько таких окружностей можно построить?



УПРАЖНЕНИЯ

- 511.° На рисунке 295 точка O — центр окружности, диаметр CD перпендикулярен хорде AB . Докажите, что $\angle AOD = \angle BOD$.

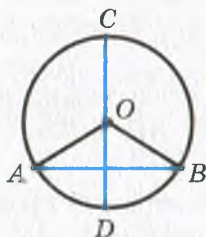


Рис. 295

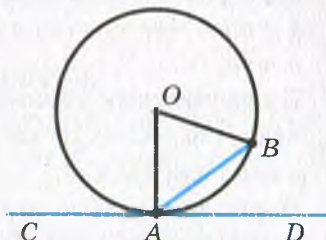
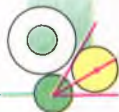


Рис. 296

- 512.° Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от ее центра.
- 513.° Докажите, что если хорды окружности равноудалены от ее центра, то они равны.
- 514.° Можно ли утверждать, что прямая, перпендикулярная радиусу окружности, касается этой окружности?
- 515.° Прямая CD касается окружности с центром O в точке A , отрезок AB — хорда окружности, $\angle BAD = 35^\circ$ (рис. 296). Найдите угол AOB .
- 516.° Прямая CD касается окружности с центром O в точке A , отрезок AB — хорда окружности, $\angle AOB = 80^\circ$ (рис. 296). Найдите угол BAC .
- 517.° Дана окружность, диаметр которой равен 6 см. Прямая a удалена от ее центра: 1) на 2 см; 2) на 3 см; 3) на 6 см. В каком случае прямая a является касательной к окружности?
- 518.° В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$. Докажите, что:
- 1) прямая BC является касательной к окружности с центром A , проходящей через точку C ;
 - 2) прямая AB не является касательной к окружности с центром C , проходящей через точку A .



- 519.** Докажите, что диаметр окружности больше любой хорды, отличной от диаметра.
- 520.** В окружности с центром O через середину радиуса провели перпендикулярную ему хорду AB . Докажите, что $\angle AOB = 120^\circ$.
- 521.** Найдите угол между радиусами OA и OB окружности, если расстояние от центра O окружности до хорды AB в 2 раза меньше: 1) длины хорды AB ; 2) радиуса окружности.
- 522.** В окружности провели диаметр AB и хорды AC и CD так, что $AC = 12$ см, $\angle BAC = 30^\circ$, $AB \perp CD$. Найдите длину хорды CD .
- 523.** Через точку M к окружности с центром O провели касательные MA и MB , A и B — точки касания, $\angle OAB = 20^\circ$. Найдите угол AMB .
- 524.** Через концы хорды AB , равной радиусу окружности, провели две касательные, пересекающиеся в точке C . Найдите угол ACB .
- 525.** Через точку C окружности с центром O провели касательную к этой окружности, AB — диаметр окружности. Из точки A на касательную опущен перпендикуляр AD . Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .
- 526.** Прямая AC касается окружности с центром O в точке A (рис. 297). Докажите, что угол BAC в 2 раза меньше угла AOB .
- 527.** Отрезки AB и BC — соответственно хорда и диаметр окружности, $\angle ABC = 30^\circ$. Через точку A провели касательную к окружности, пересекающую прямую BC в точке D . Докажите, что треугольник ABD равнобедренный.

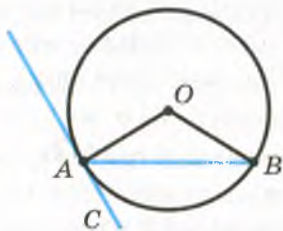


Рис. 297

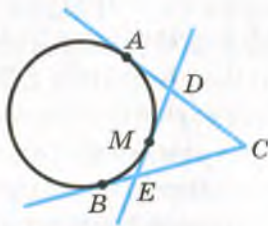


Рис. 298



- 528.* Известно, что диаметр AB делит хорду CD пополам, но не перпендикулярен ей. Докажите, что CD также является диаметром.
- 529.** Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются данной прямой в данной точке.
- 530.** Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются обеих сторон данного угла.
- 531.** Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются данной прямой.
- 532.** Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B , пересекаются в точке K , $\angle AKB = 120^\circ$. Докажите, что $AK + BK = OK$.
-  533.** Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M и касается продолжений двух других сторон. Докажите, что сумма длин отрезков BC и BM равна половине периметра треугольника ABC .
- 534.** Через точку C проведены касательные AC и BC к окружности, A и B — точки касания (рис. 298). На окружности взяли произвольную точку M , лежащую в одной полуплоскости с точкой C относительно прямой AB , и через нее провели касательную к окружности, пересекающую прямые AC и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEC не зависит от выбора точки M .



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

535. Докажите, что середина M отрезка, концы которого принадлежат двум параллельным прямым, является серединой любого отрезка, который проходит через точку M и концы которого принадлежат этим прямым.
536. Отрезки AB и CD лежат на одной прямой и имеют общую середину. Точку M выбрали так, что треугольник AMB равнобедренный с основанием AB . Докажите, что треугольник CMD также равнобедренный с основанием CD .



537. На стороне MK треугольника MPK отметили точки E и F так, что точка E лежит между точками M и F , $ME = EP$, $PF = FK$. Найдите угол M , если $\angle EPF = 92^\circ$, $\angle K = 26^\circ$.
538. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BM . Из точки M на сторону BC опущен перпендикуляр MK . Оказалось, что $\angle ABM = \angle KMC$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.



**НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ**

539. Установите закономерность форм фигур, изображенных на рисунке 299. Какую фигуру надо поставить следующей?

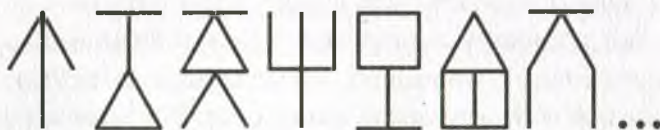


Рис. 299

21. Описанная и вписанная окружности треугольника

Определение. Окружность называют **описанной** около треугольника, если она проходит через все его вершины.

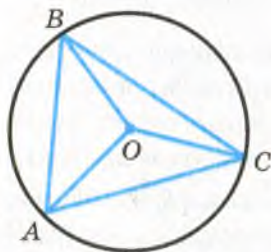


Рис. 300

На рисунке 300 изображена окружность, описанная около треугольника. В этом случае также говорят, что **треугольник вписан в окружность**.

На рисунке 300 точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Отрезки OA , OB и OC — радиусы этой окружности, поэтому $OA = OB = OC$. Следовательно, *центр описанной окружности треугольника равноудален от всех его вершин*.



Теорема 21.1. *Около любого треугольника можно описать окружность.*

Доказательство. ☺ Для доказательства достаточно показать, что для любого треугольника ABC существует точка O , равноудаленная от всех его вершин. Тогда точка O будет центром описанной окружности, а отрезки OA , OB и OC — ее радиусами.

На рисунке 301 изображен произвольный треугольник ABC . Проведем серединные перпендикуляры k и l сторон AB и AC соответственно. Пусть O — точка пересечения этих прямых. Поскольку точка O принадлежит серединному перпендикуляру k , то $OA = OB$. Поскольку точка O принадлежит серединному перпендикуляру l , то $OA = OC$. Значит, $OA = OB = OC$, то есть точка O равноудалена от всех вершин треугольника. ▲

Заметим, что около треугольника можно описать только одну окружность. Это следует из того, что серединные перпендикуляры k и l (рис. 301) имеют только одну точку пересечения. Следовательно, существует только одна точка, равноудаленная от всех вершин треугольника.

Следствие 1. *Три серединных перпендикуляра сторон треугольника пересекаются в одной точке.*

Следствие 2. *Центр окружности, описанной около треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.*

Определение. Окружность называют **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон.

На рисунке 302 изображена окружность, вписанная в треугольник. В этом случае также говорят, что **треугольник описан около окружности**.

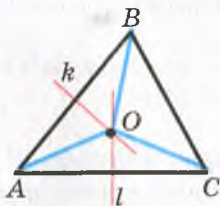


Рис. 301

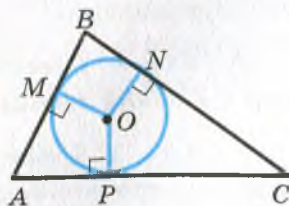


Рис. 302



На рисунке 302 точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , отрезки OM , ON , OP — радиусы, проведенные в точки касания, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Поскольку $OM = ON = OP$, то *центр вписанной окружности треугольника равноудален от всех его сторон.*

Теорема 21.2. *В любой треугольник можно вписать окружность.*

Доказательство. ☺ На рисунке 303 изображен произвольный треугольник ABC . Проведем биссектрисы углов A и B , отметим точку O их пересечения. Из точки O опустим перпендикуляры OM , ON и OP соответственно на стороны AB , BC и CA треугольника ABC . Поскольку точка O принадлежит биссектрисе угла A , то по теореме о биссектрисе угла (теорема 19.2) получаем, что $OM = OP$. Аналогично, так как точка O принадлежит биссектрисе угла B , то $OM = ON$. Пусть $OM = r$. Тогда $OM = ON = OP = r$. Следовательно, точка O уда-

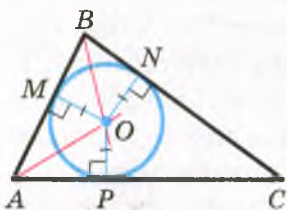


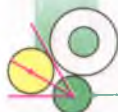
Рис. 303

лена от каждой стороны треугольника ABC на одно и то же расстояние r . Тогда в силу следствия из признака касательной к окружности (следствие из теоремы 20.4) точка O является центром окружности радиуса r , которая касается сторон AB , BC и CA . ▲

Заметим, что в треугольник можно вписать только одну окружность. Это следует из того, что биссектрисы углов A и B (рис. 303) пересекаются только в одной точке. Следовательно, существует только одна точка, равноудаленная от сторон треугольника.

Следствие 1. *Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.*

Следствие 2. *Центр окружности, вписанной в треугольник, — это точка пересечения биссектрис треугольника.*



Задача. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, определяют по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где r — радиус вписанной окружности, a и b — катеты, c — гипотенуза.

Решение. В треугольнике ABC имеем: $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, точка O — центр вписанной окружности, M , E и K — точки касания вписанной окружности со сторонами BC , AC и AB соответственно (рис. 304).

Отрезок OM — радиус окружности, проведенный в точку касания. Тогда $OM \perp BC$.

Так как точка O — центр вписанной окружности, то луч CO — биссектриса угла ACB , следовательно, $\angle OCM = 45^\circ$. Тогда треугольник CMO равнобедренный прямоугольный. Отсюда $CM = OM = r$.

Используя свойство отрезков касательных, проведенных к окружности через одну точку, получаем: $CE = CM$. Поскольку $CM = r$, то $CE = r$. Тогда $AK = AE = b - r$; $BK = BM = a - r$.

Так как $AK + BK = AB$, то $b - r + a - r = c$.
Отсюда $2r = a + b - c$, $r = \frac{a+b-c}{2}$.

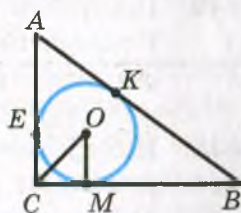
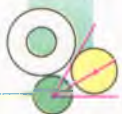


Рис. 304

1. Какую окружность называют описанной около треугольника?
2. Какой треугольник называют вписанным в окружность?
3. Около какого треугольника можно описать окружность?
4. Какая точка является центром окружности, описанной около треугольника?
5. Какую окружность называют вписанной в треугольник?
6. Какой треугольник называют описанным около окружности?
7. В какой треугольник можно вписать окружность?
8. Какая точка является центром окружности, вписанной в треугольник?



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

540.° Начертите разносторонний остроугольный треугольник.

1) Пользуясь линейкой со шкалой и угольником, найдите центр окружности, описанной около данного треугольника.

2) Опишите около треугольника окружность.

Выполните задания 1 и 2 для разносторонних прямоугольного и тупоугольного треугольников.

541.° Начертите:

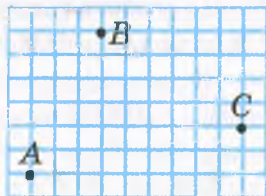
1) равнобедренный остроугольный треугольник;

2) равнобедренный тупоугольный треугольник.

Выполните задания 1 и 2 из упражнения 540.

542.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 305.

Проведите через точки A , B , C окружность, пользуясь линейкой со шкалой, угольником и циркулем.



543.° Начертите разносторонний треугольник.

Рис. 305

1) Пользуясь линейкой и транспортиром, найдите центр окружности, вписанной в данный треугольник.

2) Пользуясь угольником, найдите точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

3) Впишите в данный треугольник окружность.

544.° Начертите равнобедренный треугольник. Выполните задания 1, 2 и 3 из упражнения 543.



УПРАЖНЕНИЯ

545.° Докажите, что центр описанной окружности равнобедренного треугольника принадлежит прямой, которая содержит медиану, проведенную к его основанию.

546.° Докажите, что центр вписанной окружности равнобедренного треугольника принадлежит высоте, проведенной к его основанию.

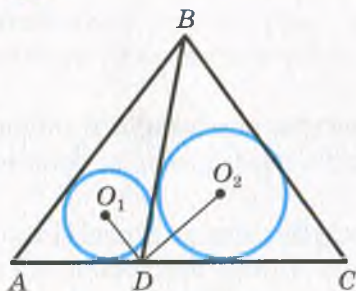


Рис. 306

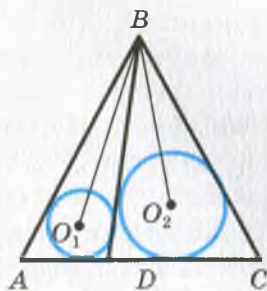


Рис. 307

- 547.°** Докажите, что если центр вписанной окружности треугольника принадлежит его высоте, то этот треугольник равнобедренный.
- 548.°** Докажите, что центр описанной окружности равностороннего треугольника является точкой пересечения его биссектрис.
- 549.°** На рисунке 306 в треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. Докажите, что угол O_1DO_2 прямой.
- 550.°** На рисунке 307 в треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, $\angle ABC = 50^\circ$. Найдите угол O_1BO_2 .
- 551.°** Через центр O окружности, описанной около треугольника ABC , провели прямую, перпендикулярную стороне AC и пересекающую сторону AB в точке M . Докажите, что $AM = MC$.
- 552.°** Окружность, вписанная в треугольник ABC (рис. 308), касается его сторон в точках M , K и E , $BK = 2$ см, $KC = 4$ см, $AM = 8$ см. Найдите периметр треугольника ABC .
- 553.°** Окружность, вписанная в треугольник ABC (рис. 308), касается его сторон в точках M , K и E , $AB = 13$ см, $BC = 8$ см, $BK = 3$ см. Найдите сторону AC .
- 554.°** Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит его высоте, то этот треугольник равнобедренный.

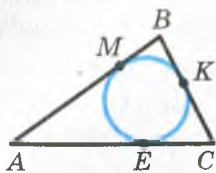
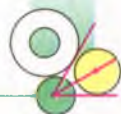


Рис. 308



- 555.*** Докажите, что если центр окружности, вписанной в треугольник, принадлежит его медиане, то этот треугольник равнобедренный.
- 556.*** Докажите, что если центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают, то этот треугольник равносторонний.
- 557.*** Точка касания вписанной окружности равнобедренного треугольника делит его боковую сторону в отношении $7 : 5$, считая от вершины равнобедренного треугольника. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 68 см.
- 558.*** Периметр треугольника ABC , описанного около окружности, равен 52 см. Точка касания окружности со стороной AB делит эту сторону в отношении $2 : 3$, считая от вершины A . Точка касания со стороной BC удалена от вершины C на 6 см. Найдите стороны треугольника.
- 559.*** В треугольник с углами 30° , 70° и 80° вписана окружность. Найдите углы треугольника, вершины которого являются точками касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника.
- 560.*** Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC , касается его боковых сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN \parallel AC$.
- 561.*** Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит его стороне, то этот треугольник прямоугольный.
- 562.*** В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M , $BC = a$. Докажите, что $AM = p - a$, где p — полупериметр треугольника ABC .
- 563.*** К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a , провели касательную, пересекающую две стороны треугольника. Найдите периметр треугольника, который эта касательная отсекает от данного.
- 564.*** В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с основанием 10 см вписана окружность. К этой окружности проведены три касательные, отсекающие от данного треугольника треугольники ADK , BEF и CMN . Сумма периметров этих треугольников равна 42 см. Чему равна боковая сторона данного треугольника?

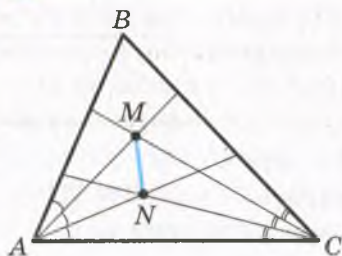


Рис. 309

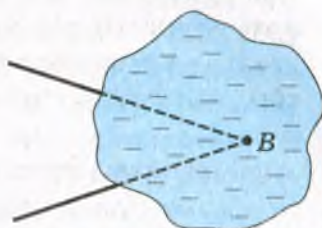


Рис. 310

- 565.* В треугольнике ABC отрезок BD — медиана, $AB = 7$ см, $BC = 8$ см. В треугольники ABD и BDC вписали окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с отрезком BD .
- 566.* Каждый из углов BAC и ACB треугольника ABC разделили на три равные части (рис. 309). Докажите, что $\angle AMN = \angle CMN$.
- 567.* Пусть вершина угла B недоступна (рис. 310). С помощью транспортира и линейки без делений постройте прямую, содержащую биссектрису угла B .
- 568.* Точки F и O — центры вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника ABC соответственно (рис. 311). Они находятся на одинаковом расстоянии от его основания AC . Найдите углы треугольника ABC .

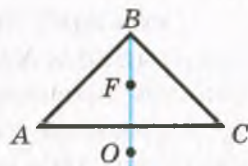
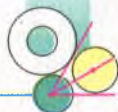


Рис. 311



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

569. Биссектриса угла ABC образует с его стороной угол, равный углу, смежному с углом ABC . Найдите угол ABC .
570. В равнобедренном треугольнике из вершины одного угла при основании провели высоту треугольника, а из вершины другого угла при основании — биссектрису треугольника. Один из углов, образовавшихся при пересечении проведенных биссектрисы и высоты, равен 64° . Найдите углы данного треугольника.



571. На рисунке 312 $BC \parallel AD$, $AB = 3$ см, $BC = 10$ см. Биссектриса угла BAD пересекает отрезок BC в точке K . Найдите отрезки BK и KC .

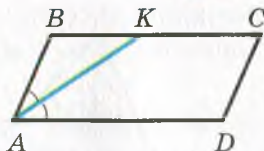


Рис. 312

572. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, AM и CK — медианы этого треугольника. Докажите, что $MK \parallel AC$.



**НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ**

573. В квадрате $ABCD$ вырезали заштрихованную фигуру (рис. 313). Разделите оставшуюся часть квадрата на четыре равные фигуры.

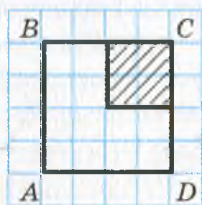


Рис. 313

22. Задачи на построение¹

С помощью линейки с делениями, циркуля, угольника, транспортира, лекал (рис. 314) вам не раз приходилось выполнять различные геометрические построения.

А можно ли обходиться меньшим количеством чертежных инструментов? Оказывается, что во многих случаях достаточно

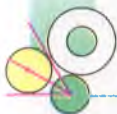
использовать только *циркуль* и *линейку без делений*. Например, чтобы провести биссектрису угла, совсем не обязательно иметь транспортир, а разделить отрезок пополам можно и тогда, когда на линейку не нанесена шкала.

А стоит ли в наше время, когда созданы точнейшие приборы и совершенные компьютерные программы, позволяющие выполнять сложнейшие измерения и построения, обходиться такими скудными средствами,



Рис. 314

¹ Материал этого пункта не является обязательным для изучения.



как циркуль и линейка? На практике, конечно, нет. Поэтому, например, конструкторы, строители, архитекторы, дизайнеры не ограничивают себя в выборе инструментов.

Однако при построении фигур в геометрии договорились придерживаться таких правил:

- 1) все построения выполняются только с помощью циркуля и линейки без делений;
- 2) с помощью линейки можно через заданную точку провести прямую, а также через заданные две точки A и B провести прямую AB ;
- 3) с помощью циркуля можно построить окружность с данным центром и радиусом, равным заданному отрезку.

Итак, договоримся, что если в задаче требуется построить какую-то фигуру, то построение выполняют по описанным выше правилам.

Решить задачу на построение — это значит составить план (алгоритм) построения фигуры; реализовать план, выполнив построение; доказать, что полученная фигура является искомой.

Рассмотрим основные задачи на построение.

 **Задача 1.** Постройте угол, равный данному, одна из сторон которого является данным лучом.

Решение. На рисунке 315 изображены угол A и луч OK . Надо построить угол, равный углу A , одной из сторон которого является луч OK .

Проведем окружность произвольного радиуса r с центром в точке A . Точки пересечения этой окружности со сторонами угла A обозначим B и C (рис. 316). Тогда $AB = AC = r$.

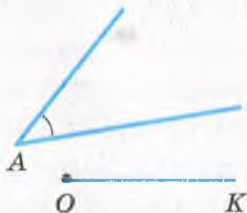


Рис. 315

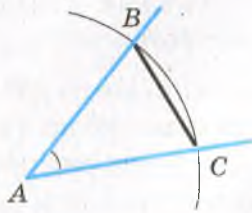


Рис. 316